

**T-317** Määritä  $\sin 2\alpha$  ja  $\cos 2\alpha$ , kun  $\tan \alpha = -\sqrt{5}$  ja kulma  $\alpha$  on tylppä.

Katsotaan kaksi eri tapaa ratkaista tämä tehtävä ja pohditaan mahdollisia virhetekijöitä.

**TAPA 1**

Siis,  $\tan \alpha = -\sqrt{5}$  ja  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Hyödynnetään MAOL:ssa olevaa tulosta  $\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ , joten muodostuu yhtälö

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot (-\sqrt{5})}{1 - (-\sqrt{5})^2} = \frac{-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ja toisaalta  $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ . Siis

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

josta saadaan

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (\pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}) \quad | ( )^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{5}{4} (1 - \sin^2 2\alpha)$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Koska kulma  $\alpha$  on tylppä  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , niin tästä seuraa, että  $\pi < 2\alpha < 2\pi$  ja  $\sin 2\alpha$  on negatiivinen. (Voit halutessasi piirtää 1-ympyrän ja "mallata" sinne ko. kulmia.) Siis  $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  ja edelleen, että  $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ , sillä  $\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$  kuten yllä on laskettu.

**TAPA 2**

Siis,  $\tan \alpha = -\sqrt{5}$  ja  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tästä seuraa, että

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{5} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{5} \cdot (\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) \quad | ( )^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 5 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}$$

josta valitaan vain positiivinen koska  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Edelleen  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{5}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ , jotta  $\tan \alpha = -\sqrt{5}$ . Lopuksi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{6} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ja

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Molemmilla tavoilla tuli sama tulos. Taisin aiemmin hieman sekoilla, huomasin, että minulla oli mennyt  $\tan \alpha$  ja  $\tan 2\alpha$  sekaisin.