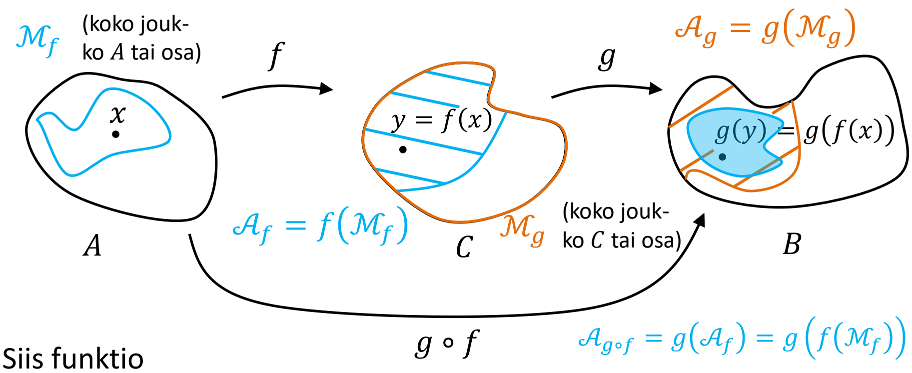
Yhdistetty funktio

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT, MAA7

Määritelmä, yhdistetty funktio:
Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* $g \circ f$ (luetaan "g pallo f") määritellään yhtälöllä

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\,.$$

Funktio g on ns. *ulkofunktio* ja f *sisäfunktio*.



Siis funktio

$$(g \circ f)\colon A \to B\,;\ x \longmapsto g\big(f(x)\big)\,.$$

Lyhyesti, mikä on funktion f arvojoukon $\mathcal{A}_f$ (eng. "*range*") ja kuvajoukon $f(\mathcal{M}_f)$ (eng. "*image*") välinen ero?
Käytännössä samat. Voidaan ajatella, että arvojoukko kertoo vain mitkä arvot funktio saa, mutta kuvajoukko pitää sisällään tiedon kuinka monta kertaa jokin tietty arvo saadaan (tämä vain mun omaa pohdintaa). Vertaa funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \ x \longmapsto y = x^2$. Arvojoukoksi tulee luvut nollasta äärettömään. Eli $\mathbb{R}$:n kuva on $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$.

Älä sekoita arvo- eli kuvajoukkoa maalijoukkoon! (wikipedian ongelma!)

Miten yhdistetyn funktion arvo lasketaan. Funktion $g \circ f$ arvo muuttujan arvolla x saadaan laskemalla ensin $f(x)$ (funktion f arvo) ja sitten funktion g arvo lasketulla muuttujan arvolla $y = f(x)$.
Huomaa merkintä

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\,.$$

Siis ensin operoi f ja sitten g.
Usein muodostetaan suoraan lopullinen eli yhdistetyn funktion lauseke.

Jatkossa voidaan ”pallotella” useamman funktion voimin, eli esim.

$$(h \circ g \circ f)(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) .$$

Esimerkki Olkoon $f\colon\ f(x) = x^2$ ja $g\colon\ g(y) = 2y$. Tällöin

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2 \cdot f(x) = 2x^2 ,$$

$$(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = \big(g(y)\big)^2 = (2y)^2 = 4y^2.$$

Tehdään havainto $g \circ f \neq f \circ g$ ja näin on lähes aina!

Olkoon $f\colon\ f(x) = 1 + 2x$ ja $g\colon\ g(y) = \sqrt{y}$. Tällöin

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1+2x}\,, \qquad 1 + 2x \geq 0 \ \text{ eli } \ x \geq -\frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)(y) = 1 + 2\sqrt{y}, \qquad y \geq 0$$

Siis, määrittelyjoukot eri!

Esimerkki Olkoon $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^2$ ja $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Tällöin

$$(f \circ g)(x) = 3^{g(x)} = 3^{x^2} \ \text{ ja } \ (g \circ f)(x) = \big(f(x)\big)^2 = (3^x)^2 = 3^{2x} .$$

Lisäksi

$$(h \circ g \circ f)(x) = \frac{1 - g\big(f(x)\big)}{1 + g\big(f(x)\big)} = \frac{1 - \big(f(x)\big)^2}{1 + \big(f(x)\big)^2} = \frac{1 - 3^{2x}}{1 + 3^{2x}} .$$

Ja laskemalla arvo muuttujan arvolla -2, saadaan

$$\Longrightarrow \ (h \circ g \circ f)(-2) = \frac{1 - 3^{2\cdot(-2)}}{1 + 3^{2\cdot(-2)}} = \frac{1 - \frac{1}{3^4}}{1 + \frac{1}{3^4}} = \frac{1 - \frac{1}{81}}{1 + \frac{1}{81}} = \frac{80}{82} \approx 0{,}975 .$$

Ja mikään ei estä pallottelemasta samaa funktiota, esim. $h \circ h$, eli

$$(h \circ h)(x) = \frac{1 - h(x)}{1 + h(x)} = \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{\dfrac{1 + x - 1 + x}{1+x}}{\dfrac{1 + x + 1 - x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x .$$

Havaitaan mielenkiintoinen ilmiö. Funktio $h \circ h$ palauttaa muuttujan x, kunhan $x \neq -1$.

Eikös tämä funktio h ole käänteisfunktio funktiolle h, eli itselleen? Aivan… näihin käänteisfunktioihin palataan.

Yhdistetyn funktion derivaatta

7.-kurssilla: $Df(x)^n = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$, eli esimerkiksi
$(2x^2-5)^3 = 3 \cdot (2x^2-5)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2-5)^2$.

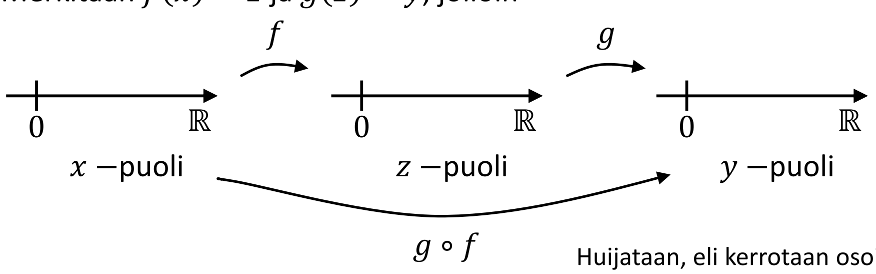
Lause
Olkoon funktio f derivoituva kohdassa x ja funktio g kohdassa $f(x)$. Tällöin yhdistetyn funktion $g \circ f$ derivaatta on ulko- ja sisäfunktion derivaattojen tulo (useita merkintöjä)

$$D(g \circ f)(x) = D(gf)(x) = Dg\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) .$$

Todistus Sivuutetaan. Tulee erotusosamäärän raja-arvosta.

Sen sijaan tarkastellaan asiaa ns. ketjusäännön avulla ja otetaan differentiaalit käyttöön. (Differentiaali on äärettömän pieni muutos. Kurssilla 13 jatketaan differentiaalien tarkastelua. Halukkaat voivat tutustua pedasta löytyvään matskuun.)

Merkitään $f(x) = z$ ja $g(z) = y$, jolloin



Tällöin

Huijataan, eli kerrotaan osoittaja 1:llä muodossa dz/dz.

$$D(g \circ f\,)(x) = \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg\big(f(x)\big)}{dx} = \frac{\frac{dg\left(f(x)\right)}{dz} \cdot dz}{dx}$$

$$= \frac{dg\big(f(x)\big)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dg(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$f(x) = z$ $\qquad$ $g(z) = y$

Nyt $\frac{dy}{dz}$ on ulkofunktion derivaatta ja $\frac{dz}{dx}$ on sisäfunktion derivaatta.

Esimerkki Määritä **a)** $D\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$ **b)** $D(1+3x)^2$.

a) Sisäfunktiona on f: $f(x)=\frac{x}{x+2}$ ja ulkofunktiona g: $g(x)=x^2$.
Näin ollen

$$D\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 = \underbrace{2\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)^1}_{\substack{\text{ulkofunktion}\\ g\text{ derivaatta}\\ \text{kohdassa } f(x).}} \cdot \underbrace{\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}}_{\substack{\text{sisäfunktion}\\ f\text{ derivaatta}\\ \text{kohdassa } x\,.}} = \frac{2x}{x+2}\cdot\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x+2)^3}\;.$$

b)

$$D(1+3x)^2 = 2\cdot(1+3x)\cdot 3 = 6(1+3x) = 18x+6\,.$$

Esimerkki Millä x:n arvoilla funktio f: $f(x)=x^2(1-2x)^5$ on aidosti kasvava?
Aluksi on syytä tehdä ns. perushavainnot: Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Onko f polynomifunktio?

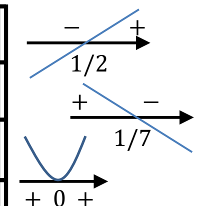
Saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cdot(1-2x)^5 + x^2\cdot 5(1-2x)^4\cdot(-2) \\ &= 2x\cdot(1-2x)(1-2x)^4 - 10x^2\cdot(1-2x)^4 \\ &= (2x-4x^2)(1-2x)^4 - 10x^2\cdot(1-2x)^4 \\ &= (2x-14x^2)(1-2x)^4 \\ &= 2x(1-7x)(1-2x)^4 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x)=0 \quad \Longleftrightarrow x = 0, 1/7, 1/2$$

Derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

	$x<0$	0 … $1/7$	$1/7$ … $1/2$	$x>1/2$
$2x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$1-7x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(1-2x)^4$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$	$-$
f	↘	↗	↘	↘



Näin ollen f on aidosti kasvava, kun

$$0 \le x \le \frac{1}{7}\,.$$

Esimerkki Derivoi määritelmän $\sqrt{f}$ kautta . Oletetaan, että f' on olemassa.

$$D\sqrt{f(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}\right)\cdot\left(\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}\right)}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}_{=f'}\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\right)$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \qquad \text{OK.}$$