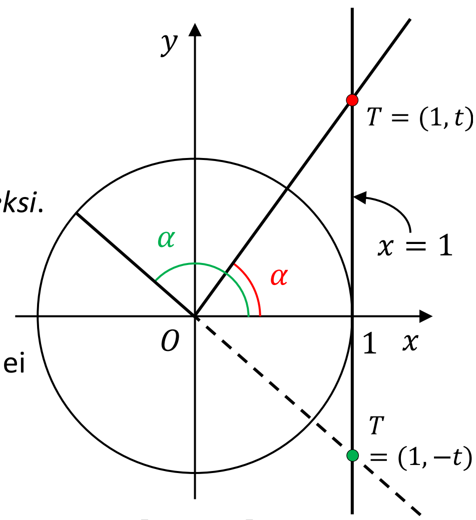
Tangenttipiste ja kulman α tangentti:

Kulman α kehäpisteen P koordinaatit antavat suoraan kulman α sinin ja kosinin. Myös tangentti voidaan määrittää graafisesti.

Määritelmä:

Yksikköympyrää pisteessä $(1,0)$ leikkaava suora $x = 1$ ja kulman loppukylki tai sen jatke leikkaavat pisteessä $T = (1, t)$. Tätä pistettä sanotaan kulman α *tangenttipisteeksi*.



Kulman α tangentti on tangenttipisteen T y-koordinaatin arvo t.

HUOM! Kun $\alpha = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$, ei tangenttia ole määritelty, sillä

$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

ja nollalla ei saa jakaa.

$\mathcal{A}_{\tan} =]-\infty, \infty[$.

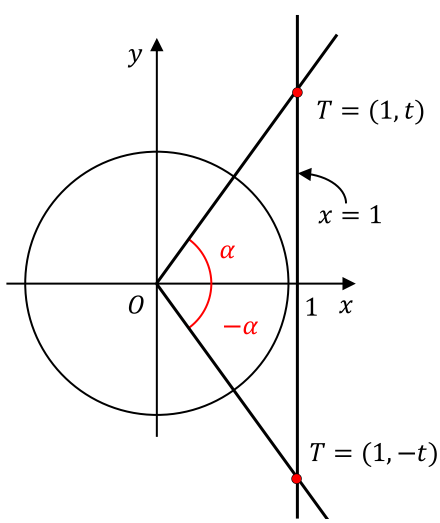
Palautuskaavat:

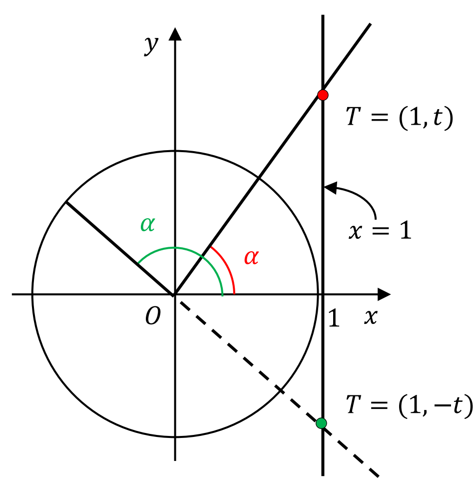
Tangentille saadaan

$$\tan\alpha = -\tan(-\alpha)\,.$$

Vastaavasti suplementtikulmalle $180° - \alpha$ pätee

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha \quad \text{tai} \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha\,.$$





Tangenttifunktio

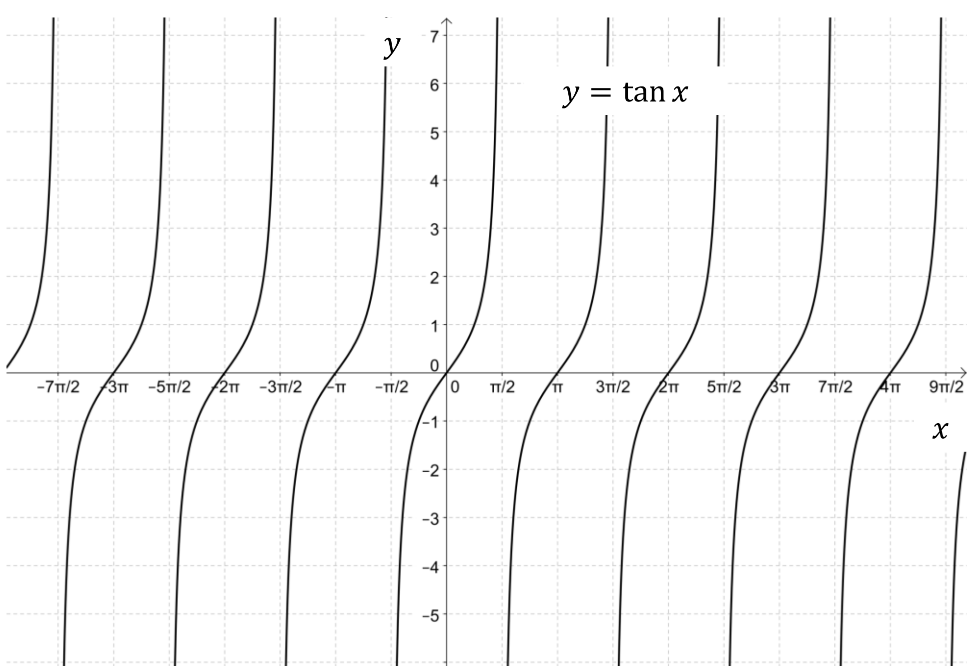
TRIGONOMETRISET FUNKTIOT, MAA7

Tangenttifunktio on sinin ja kosinin tavoin jaksollinen, perusjaksona π. Muista, että tangenttifunktiota ei ole määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, kuten $\cos x$ ja $\sin x$. Koska $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, niin silloin kun $\cos x = 0$, eli kun $x = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$ ei tangenttia ole määritelty.

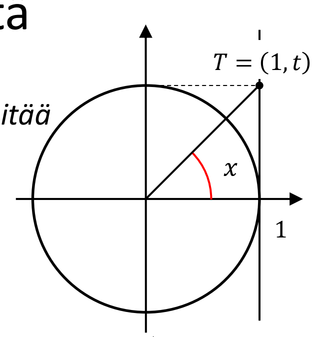
Tangentti saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja, siis

$$-\infty < \tan x < \infty\,.$$

Jaksollisuuden myötä trigonometrisille funktioille <u>riittää</u> piirtää kuvaaja perusjakson mittaiselle x-akselin osuudelle. (Toki saa piirtää enemmänkin.)



Tangenttiyhtälöitä



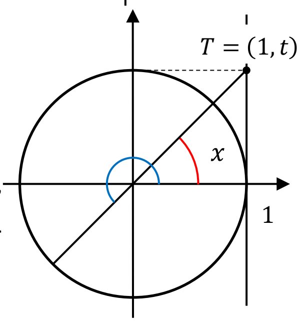
Esimerkki Ratkaise yhtälö $\tan x = 1$.
Tangentin tapauksessa aina ensimmäisenä pitää määrittelyehto tsekata!

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Eli, millä kulman x arvolla tangenttipisteen T y-koordinaatin arvo on yksi, eli $T = (1,1)$?

→ $x = \frac{\pi}{4}$ (tai $x = 45°$)

→ Jaksollisuus: $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.



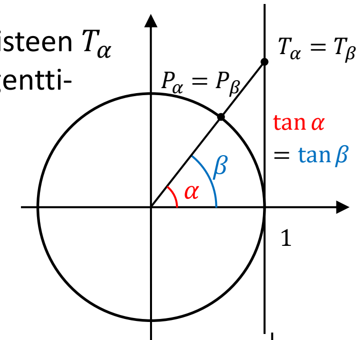
Myös $x = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ käy ratkaisuksi.

Edelleen havaitaan, että $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$, jolloin lopullinen vastaus voidaan ilmaista muodossa

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Tangentin perusjakso on siis π, sinin ja kosinin 2π. *Tärkeää:* lopuksi pitää vastaus tarkistaa alussa tehtyyn määrittelyehtoon.
Vastaus $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ toteuttaa määr.ehdon $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

$\tan \boldsymbol{\alpha} = \tan \boldsymbol{\beta}$

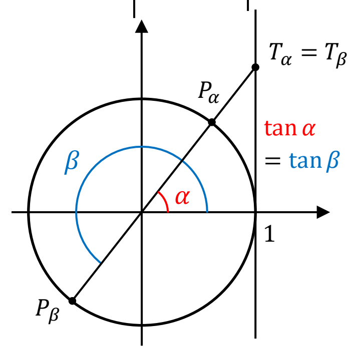


”Suomennos”. Milloin kulman α tangenttipisteen T_α $\boldsymbol{y}$-koordinaatti on sama kuin kulman β tangenttipisteen T_β $\boldsymbol{y}$-koordinaatti.

Kaksi vaihtoehtoa:

1. Kulmat ja tangenttipisteet T_α ja T_β ovat samat, eli

$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi\,.$$



2. Kulmien α ja β kehäpisteet P_α ja P_β ovat eri, mutta tangenttipisteet ovat samat, eli

$$\alpha = \beta + n \cdot \pi\,.$$

SIIS $\quad \boldsymbol{\alpha = \beta + n \cdot \pi}$

TANGENTIN KOHDALLA TARKISTA/ VARMISTA, ETTÄ SAAMASI RATKAISUKULMA KUULUU TANGENTIN MÄÄRITTELYJOUKKOON! MÄÄRITTELYJOUKKO RIIPPUU SIITÄ, MITÄ ON TANGENTIN SISÄLLÄ!

ESIMERKKI

Ratkaise yhtälö

$$\tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Määritelmä:

$$4x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad \text{JA} \qquad \frac{\pi}{2} + x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

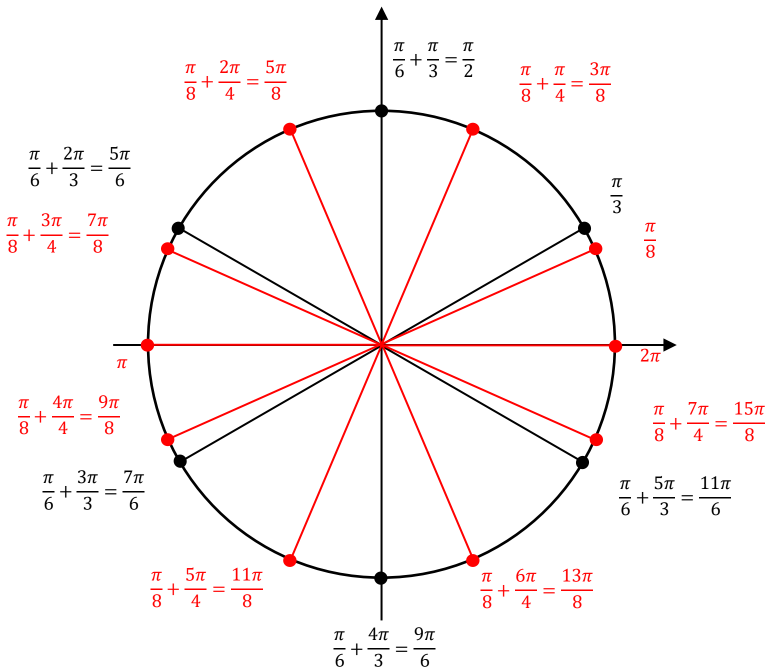
$$x \neq \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \text{JA} \qquad x \neq n \cdot \pi$$

Tangentille saatiin: $\alpha = \beta + n \cdot \pi, \alpha = 4x$ ja $\beta = \frac{\pi}{2} + x.$

$$4x = \frac{\pi}{2} + x + n \cdot \pi$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$$



Esimerkki tangentin ääriarvotehtävästä

Määritä funktion f: $f(t)=\tan\left(6t-\frac{\pi}{3}\right)-24t$ ääriarvot välillä $\left[0,\frac{2\pi}{15}\right[$.
Onko funktiolla suurinta ja pienintä arvoa?

Funktio f on hyvin määritelty, jva&deriv., kun $6t-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$, eli kun

$$6t-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$$
$$6t\neq\frac{5\pi}{6}+n\cdot\pi$$
$$t\neq\frac{5\pi}{36}+n\cdot\frac{\pi}{6}$$

Kiellettyjä kulmia ovat siis esim.: $\frac{5\pi}{36}$, $\underbrace{\frac{11\pi}{36}}_{\frac{5\pi}{36}+1\cdot\frac{\pi}{6}}$, $\underbrace{\frac{17\pi}{36}}_{\frac{5\pi}{36}+2\cdot\frac{\pi}{6}}$ jne. $\underbrace{-\frac{1\pi}{36}}_{\frac{5\pi}{36}-1\cdot\frac{\pi}{6}}$, $\underbrace{-\frac{7\pi}{36}}_{\frac{5\pi}{36}-2\cdot\frac{\pi}{6}}$ jne.

Mutta koska meillä tarkasteluvälinä on $\left[0, \frac{2\pi}{15}\right[$ eikä mikään kielletty kulma kuulu tälle välille on ”kaikki hyvin”. Näin ollen kysytyt ääriarvot löytyvät siis välin päätepisteestä $t = 0$, derivaatan nollakohdista tai tarkastelemalla toispuolista raja-arvoa $t \to \frac{2\pi}{15}-$.

Derivointi antaa (tangentin derivaatat, $D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$):

$$f'(t) = \underbrace{\left(1 + \tan^2\left(6t - \frac{\pi}{3}\right)\right)}_{\text{tangentin derivaatta}} \cdot \underbrace{6}_{\substack{\text{sisä}-\\ \text{funk.}\\ \text{deriv.}}} - 24, \qquad t \neq \frac{5\pi}{36} + n \cdot \frac{\pi}{6}$$

ja $f'(t) = 0$, kun $\left(1 + \tan^2\left(6t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot 6 - 24 = 0$, eli

$$\left(1 + \tan^2\left(6t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot 6 = 24$$

$$1 + \tan^2\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{24}{6} = 4$$

$$\tan^2\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) = 3$$

$$\Longrightarrow \qquad \tan\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{3}$$

Saadaan siis kaksi yhtälöä:

$$\tan\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad 6t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$$

$$6t = \frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi$$

$$t = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$\tan\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad 6t - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi$$

$$6t = \pi + n \cdot \pi$$

$$t = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{6}$$

Ratkaisukulmia t ovat siis esimerkiksi:

$$\frac{\pi}{9}, \underbrace{\frac{5\pi}{18}}_{\frac{\pi}{9}+1\cdot\frac{\pi}{6}}, \underbrace{\frac{4\pi}{9}}_{\frac{\pi}{9}+2\cdot\frac{\pi}{6}}, \ldots \qquad \text{tai} \qquad \frac{\pi}{6}, \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\frac{\pi}{6}+1\cdot\frac{\pi}{6}}, \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{\pi}{6}}, \ldots$$

Ratkaisukulmat toteuttavat määrittelyehdon, eli ratkaisukulmat eivät ole kielletty kulmia! (Totea tämä…miten? Koska sama jakso $\frac{\pi}{6}$, niin…)

Meitä kiinnostaa vain ne kulmat, jotka osuvat välille $\left[0, \frac{2\pi}{15}\right[$. Vain yksi ratkaisukulma, eli $t = \frac{\pi}{9}$, kuuluu välille $\left[0, \frac{2\pi}{15}\right[$.

Lopuksi ne ääriarvot:

$$f(0) = \tan\left(6 \cdot 0 - \frac{\pi}{3}\right) - 24 \cdot 0 = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 0 = -\sqrt{3} \approx -1{,}732$$

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \tan\left(6 \cdot \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3}\right) - 24 \cdot \frac{\pi}{9} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{8\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} \approx -6{,}646$$

$$\lim_{t \to \frac{2\pi}{15}-} f(t) = \lim_{t \to \frac{2\pi}{15}-} \left(\tan\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) - 24t\right) = \tan\left(6 \cdot \frac{2\pi}{15} - \frac{\pi}{3}\right) - 24 \cdot \frac{2\pi}{15}$$

$$= \tan\left(\frac{7\pi}{15}\right) - \frac{48\pi}{15} \approx -0{,}539$$

Vast.: Ei suurinta arvoa (suurin arvo siis lähestyy lukua $-0{,}539$), pienin arvo $f_{\min} = \sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} \approx -6{,}646$. Katso kuvat alla!