YLEISIMPIÄ TRIG.YHTÄLÖITÄ

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT, MAA7

Yleiset trigonometriset yhtälöt ovat muotoa:

$$\sin\alpha = \sin\beta\,, \qquad \cos\alpha = \cos\beta\,, \qquad \tan\alpha = \tan\beta\ ,$$

sekä näistä muodostettavia ns. muita yhtälöitä, esim.

$$2\sin\alpha = 3\cos\alpha\,, \qquad 2\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\ .$$

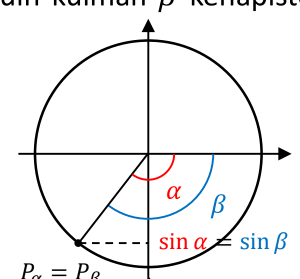
$\sin\boldsymbol{\alpha} = \sin\boldsymbol{\beta}$

”Suomennetaan” yhtälö sinin määritelmää hyödyntäen. Milloin kulman α kehäpisteen P_α $\boldsymbol{y}$-koordinaatti on sama kuin kulman β kehäpisteen P_β $\boldsymbol{y}$-koordinaatti.

Kaksi vaihtoehtoa:

1. Kulmat ovat samat täydet kierrokset huomioiden, jolloin myös kehäpisteet P_α ja P_β ovat samat, eli

$$\alpha = \beta + n\cdot 2\pi\ .$$

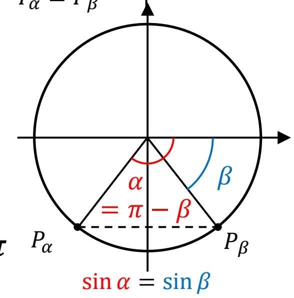


2. Kulmien α ja β kehäpisteet P_α ja P_β ovat symmetrisesti y-akselin suhteen, eli

$$\alpha = \pi - \beta + n\cdot 2\pi\ .$$

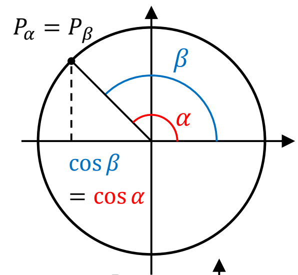
SIIS

$\boldsymbol{\alpha = \beta + n\cdot 2\pi}$ **TAI** $\boldsymbol{\alpha = (\pi - \beta) + n\cdot 2\pi}$



$\boldsymbol{\cos\alpha = \cos\beta}$

"Suomennetaan" yhtälö kosinin määritelmää hyödyntäen. Milloin kulman α kehäpisteen P_α $\boldsymbol{x}$-koordinaatti on sama kuin kulman β kehäpisteen P_β $\boldsymbol{x}$-koordinaatti.



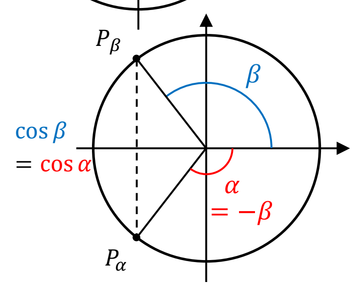
Jälleen kaksi vaihtoehtoa:

1. Kulmat ja kehäpisteet P_α ja P_β ovat samat, eli

$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi\,.$$

2. Kulmien α ja β kehäpisteet P_α ja P_β ovat symmetrisesti x-akselin suhteen, eli

$$\alpha = -\beta + n \cdot 2\pi\,.$$



SIIS

$\boldsymbol{\alpha = \pm\beta + n \cdot 2\pi}$

ESIMERKKI

Ratkaise yhtälö

$$\sin \overbrace{3x}^{=:\alpha} = \sin \overbrace{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}^{=:\beta}$$

Sinille saatiin: $\alpha = \beta + n \cdot 2\pi$ TAI $\alpha = (\pi - \beta) + n \cdot 2\pi$

$$3x = x - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{TAI} \quad 3x = \left(\pi - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + n \cdot 2\pi$$

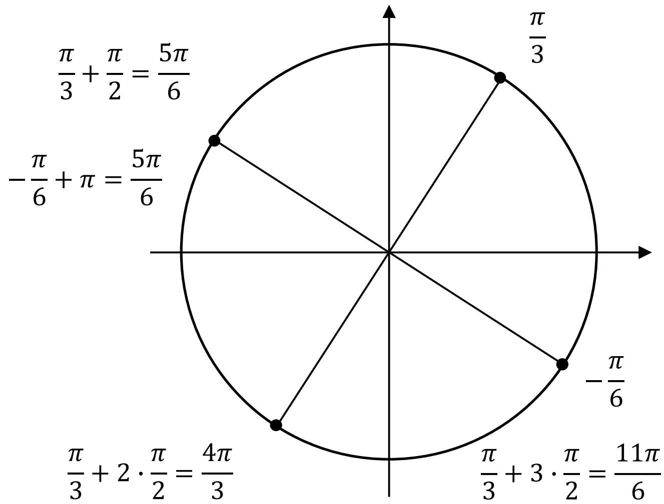
$$2x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{TAI} \quad 3x = -x + \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad \text{TAI} \quad 4x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Havaitaan, että ratkaisuksi riittää

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{\pi}{2}\ .$$



ESIMERKKI

Ratkaise yhtälö

$$\cos \overbrace{5x}^{=:\alpha} = \cos \overbrace{\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)}^{=:\beta}$$

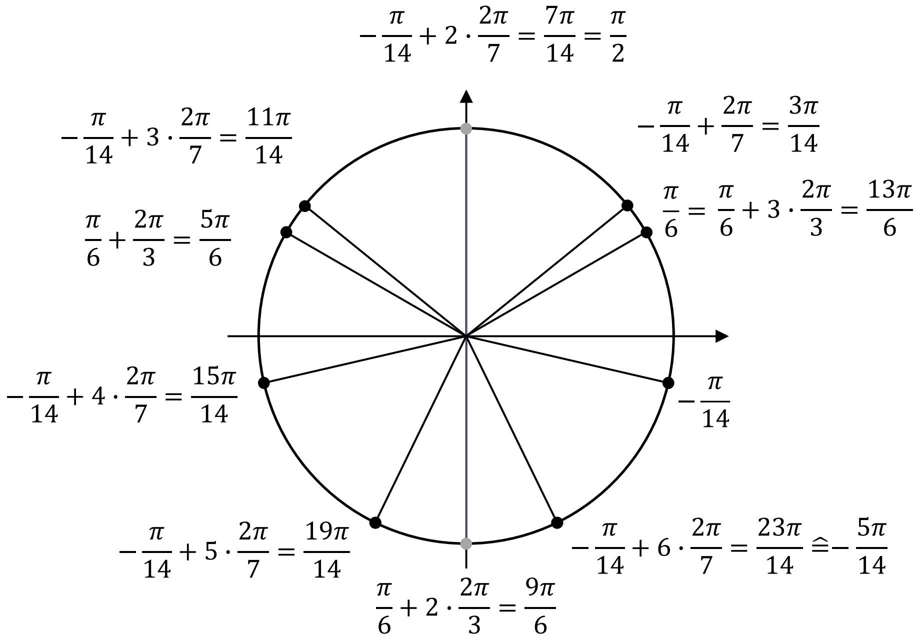
Kosinille saatiin: $\alpha = \pm\beta + n \cdot 2\pi$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{TAI} \quad 5x = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + n \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{TAI} \quad 5x = -\frac{\pi}{2} - 2x + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{TAI} \quad 7x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{14} + n \cdot \frac{2\pi}{7}$$



Muita yhtälöitä

Esimerkki Ratkaise yhtälöt **a)** $2\sin x = 3\cos x$,
b) $2\cos^2 x = \sin x\cos x$ ja **c)** $\sin^2 x = 2\cos^2 x + \sin x \cos x$.

a) Yhtälö on $\sin x$:n ja $\cos x$:n suhteen samaa astetta. Tällainen yhtälö voidaan palauttaa yhtälöksi $\tan x$ =vakio jakamalla $\cos x$:lla.
Kun $\cos x \neq 0$, niin

$$2\sin x = 3\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2\tan x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \frac{3}{2}\ ,$$

josta saadaan $x \approx 0{,}982 + n\cdot\pi$.

Kun $\cos x = 0$, niin $\sin x = 1$ tai $\sin x = -1$. Yhtälö on tällöin muotoa $2 = 0$ tai $-2 = 0$ ja siis epätosi.

b) Yhtälö $2\cos^2 x = \sin x\cos x$ saadaan muotoon

$$2\cos^2 x - \sin x\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x\,(2\cos x - \sin x) = 0,$$

josta edelleen saadaan kaksi vaihtoehtoa:

$$\cos x = 0 \qquad \text{tai} \qquad 2\cos x - \sin x = 0\ .$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad 2\cos x = \sin x\ ,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad\qquad 2 = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\,,$$
$$x \approx 1{,}11 + n \cdot \pi.$$

Siis $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x \approx 1{,}11 + n \cdot \pi$.

c) Jakamalla yhtälö $\sin^2 x = 2\cos^2 x + \sin x \cos x$ termillä $\cos^2 x$, se tulee jakamalla muotoon

$$\tan^2 x = 2 + \tan x \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2 x - \tan x - 2 = 0.$$

Nyt merkitsemällä $\tan x = y$, saadaan toisen asteen yhtälö

$$y^2 - y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -1 \ \text{ tai } \ y = 2.$$

Siis

$$\tan x = -1, \qquad \tan x = 2$$
$$\Rightarrow \qquad x = \frac{3\pi}{4} + n\pi, \qquad x \approx 1{,}11 + n\pi.$$