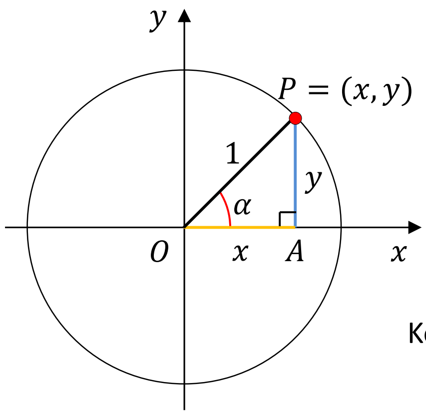
TRIGONOMETRISET FUNKTIOT, MAA7

KULMA YKSIKKÖYMPYRÄSSÄ

Kertausta, origokeskinen yksikköympyrä, kehäpiste:



Kulman α kärkipiste sijoitetaan origoon ja oikea kylki positiiviselle x – akselille. Pistettä $P = (x, y)$ sanotaan kulman α *kehäpisteeksi*.

Kolmion OAP kateetit ovat pisteen P koordinaatit x ja y ja hypotenuusa on ykkösen pituinen.

Kolmiosta OAP saadaan:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x,$$

eli sin α on kehäpisteen y – koordinaatti ja cos α on kehäpisteen x – koordinaatti.

Määritelmästä seuraa, että
$P = (x, y) = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)$

Esimerkki Millä välin $[0°, 360°[$ kulmalla α on sama kehäpiste kuin kulmalla **a)** $750°$ **b)** $-1110°$. Määritä sellainen kulma α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ jolla on sama kehäpiste kuin kulmalla **c)** $\frac{29\pi}{6}$ **d)** 9 **e)** $-\frac{16\pi}{3}$

a) $\alpha = 750° - 2 \cdot 360° = 30°$,

b) $\alpha = -1110° + 4 \cdot 360° = -1110° + 1440° = 330°$,

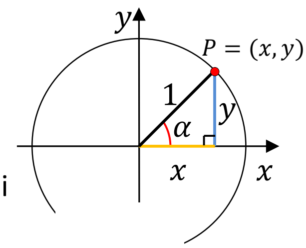
c) Koska $\frac{29\pi}{6} = 4\frac{5}{6}\pi$, niin $\alpha = 4\frac{5}{6}\pi - 2 \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6}$,

d) $\alpha = 9 - 2\pi \approx 2{,}72$,

e) $-\frac{16\pi}{3} = -5\frac{1}{3}\pi$, joten $\alpha = -5\frac{1}{3}\pi + 3 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$.

Huomautus Jokaisella kulmalla on täsmälleen yksi kehäpiste. Toisaalta jokainen yksikköympyrän piste on äärettömän monen eri kulman kehäpiste. Eli kulmilla $\alpha, \alpha \pm 2\pi, \alpha \pm 4\pi, \alpha \pm 6\pi, \ldots$ (lyhyemmin merkittynä $\alpha + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$) on sama kehäpiste.

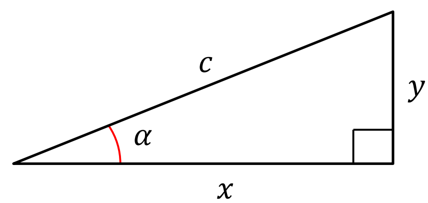
Määritelmä, sini, kosini ja tangentti:
Yksikköympyrää käyttäen kulman α



- *sini* on kehäpisteen P y-koordinaatti, eli
$$\sin\alpha = y$$
- *kosini* on kehäpisteen P x-koordinaatti, eli
$$\cos\alpha = x$$
- *tangentti* on kehäpisteen P koordinaattien osamäärä
$$\tan\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{eli } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha = x \neq 0.$$

HUOM! Suorakulmaisen kolmion avulla tehdyt sinin, kosinin ja tangentin määrittelyt yhtyvät tähän määritelmään, sillä nyt hypotenuusa on yksi.

Esim.
$$\sin\alpha = \frac{y}{c} = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$



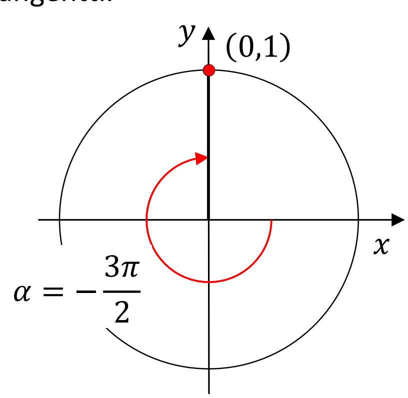
Koska yksikköympyrä eli $c = 1$, niin
$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y.$$

Esimerkki **a)** Määritä $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kun kulman α kehäpiste on $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

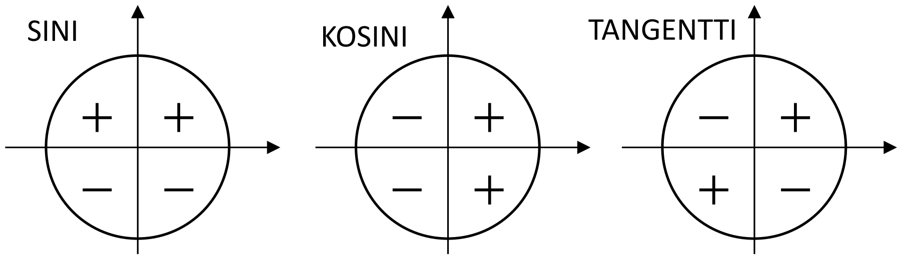
a) Määritelmästä saadaan suoraan
$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \tan\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}.$$

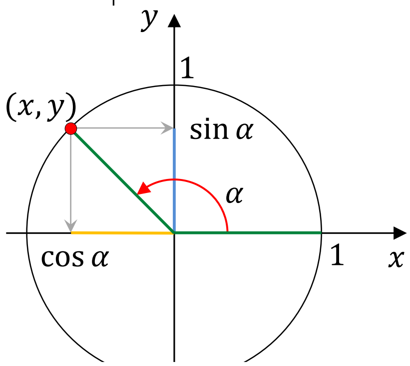
b) Määritä kulman $-\frac{3\pi}{2}$ sini, kosini ja tangentti.

Kulman $-\frac{3\pi}{2}$ kehäpiste on $(0,1)$, joten
$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1,$$
$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ ja}$$
$$\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \text{ ei määritelty}$$
koska tilanne $\frac{1}{0}$.



MERKKIKAAVIOT:





$\mathcal{A}_{\sin} = \mathcal{A}_{\cos} = [-1, 1].$

Koska kaikilla kulmilla on kehäpiste, niin sini- ja kosinifunktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, eli

$$\mathcal{M}_{\sin} = \mathcal{M}_{\cos} = \mathbb{R}.$$

Sinin ja kosinin arvot ovat kaikilla α:n ($\alpha \in \mathbb{R}$) arvoilla

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

ja

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$