Esimerkki

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT, MAA7

Ratkaise yhtälö

$$\tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

ja esitä ratkaisukulmat x yksikköympyrää käyttäen.

Tangentin kohdalla tarkistetaan ensin määrittelyehto, $n \in \mathbb{Z}$:

$$4x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad \text{JA} \qquad \frac{\pi}{4} - 2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \text{JA} \qquad -2x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \text{JA} \qquad x \neq -\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Kielletyt kulmat ovat siis (täydet kierrokset huomioiden)

$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{17\pi}{8} \triangleq \frac{\pi}{8} \quad \text{ja} \quad -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \triangleq -\frac{\pi}{8},$$

joista havaitaan, että jälkimmäiset sisältyvät ensimmäisten joukkoon.

Yhtälön ratkaisu, muista $\tan\alpha = \tan\beta \implies \alpha = \beta + n \cdot \pi$:

$$4x = \frac{\pi}{4} - 2x + n \cdot \pi$$

$$6x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{4\pi}{24}$$

Sallituista kulmista (täydet kierrokset huomioiden)

$$\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{21\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{33\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}, \frac{45\pi}{24}, \frac{49\pi}{24} \triangleq \frac{\pi}{24}$$

osa kuuluu kiellettyihin, ne ovat:

$$\frac{9\pi}{24} = \frac{3\pi}{8}, \qquad \frac{21\pi}{24} = \frac{7\pi}{8}, \qquad \frac{33\pi}{24} = \frac{11\pi}{8}, \qquad \frac{45\pi}{24} = \frac{15\pi}{8}.$$

Näin ollen ratkaisukulmat ovat (täydet kierrokset huomioiden):

$$\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24},\frac{13\pi}{24},\frac{17\pi}{24},\frac{25\pi}{24},\frac{29\pi}{24},\frac{37\pi}{24},\frac{41\pi}{24}\ .$$