TRIG.FUNKTIOIDEN DERIVAATAT

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT, MAA7

Kertausta Määritelmän mukaan derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo, merkitään

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

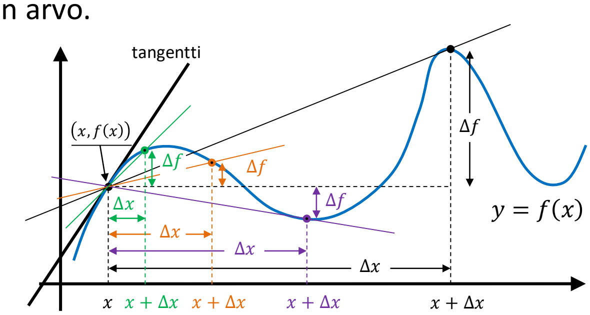
Geometrinen tulkinta on käyrän $y = f(x)$ tarkastelukohtaan asetetun tangentin kulmakertoimen arvo.

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} =$ jokin luku,

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} =$ jokin luku,

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} =$ jokin luku,

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} =$ jokin luku,



Se luku, mitä nämä luvut lähestyvät on derivaatan arvo kohdassa x, eli käyrän pisteeseen $(x, f(x))$ asetetun tangentin kulmakerroin.

Esimerkki **a)** Funktion erotusosamäärälle $f: f(x) = 2x^2$ kohdassa $x = 3$ saadaan

kun $\Delta x = 1$: $\frac{2\cdot(3+1)^2-(2\cdot 3^2)}{(3+1)-(3)} = \frac{32-18}{1} = \frac{14}{1} = 14$

kun $\Delta x = 0{,}5$: $\frac{2\cdot(3+0{,}5)^2-(2\cdot 3^2)}{(3+0{,}5)-(3)} = \frac{24{,}5-18}{0{,}5} = \frac{6{,}5}{0{,}5} = 13$

kun $\Delta x = 0{,}1$: $\frac{2\cdot(3+0{,}1)^2-(2\cdot 3^2)}{(3+0{,}1)-(3)} = \frac{19{,}22-18}{0{,}1} = \frac{1{,}22}{0{,}1} = 12{,}2$

kun $\Delta x = 0{,}01$: $\frac{2\cdot(3+0{,}01)^2-(2\cdot 3^2)}{(3+0{,}01)-(3)} = \frac{18{,}1202-18}{0{,}01} = \frac{0{,}1202}{0{,}01} = 12{,}02$

kun $\Delta x = 0{,}001$: $\frac{2\cdot(3+0{,}001)^2-(2\cdot 3^2)}{(3+0{,}001)-(3)} = \frac{18{,}012002-18}{0{,}001} = \frac{0{,}012002}{0{,}001} = 12{,}002$

kun $\Delta x = 0{,}0001$: $\frac{2\cdot(3+0{,}0001)^2-(2\cdot 3^2)}{(3+0{,}0001)-(3)} = \frac{18{,}00120002-18}{0{,}0001} = 12{,}0002$

Raja-arvo näyttäisi olevan 12 kohdassa $x = 3$. OK, sillä $f'(x) = 4x$ ja edelleen $f'(3) = 4 \cdot 3 = 12$. Edelleen, havaittiin, että määritelmän kautta derivoiminen on todella hidasta → derivoimissäännöt → MAOL.

Esimerkki Derivoi

a) $f\colon f(x) = 2x^2 + 4x$, **b)** $g\colon g(x) = \sqrt{3}\sqrt[3]{x}$

a) Kyseessä on summalauseke, derivoidaan termit erikseen:

$$f'(x) = 4x + 4.$$

b) Kyseessä on tulolauseke, huomioidaan tulofunktion derivoiminen, juuret potenssimuotoon sekä yhdistetyn funktion $\log_5 3x$ derivoimissääntö:

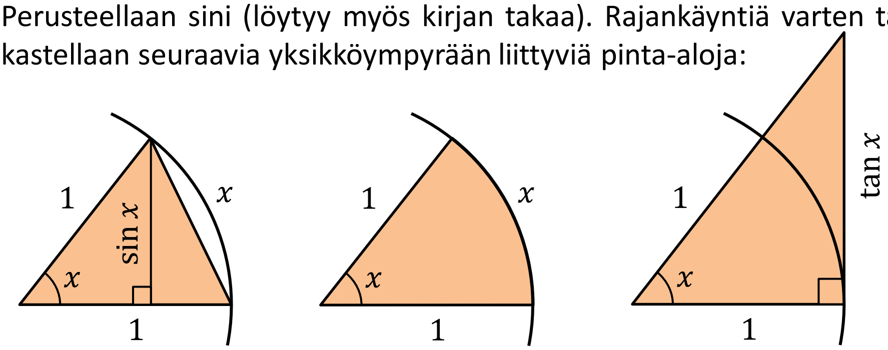
$$g'(x) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Tietysti olisi vielä hyvä tarkistaa määrittelyehdot: nollalla ei saa jakaa ja murtopotenssien jne. määrittelyehdot. Muista myös osamäärälausekkeen derivoimissääntö → MAOL.

Entä trigonometristen funktioiden derivoimissäännöt?
Osoittautuu, että

$$D\sin x = \cos x\,, \qquad D\cos x = -\sin x\,, \qquad D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Perusteellaan sini (löytyy myös kirjan takaa). Rajankäyntiä varten tarkastellaan seuraavia yksikköympyrään liittyviä pinta-aloja:



$1/2\cdot 1\cdot \sin x$ < $1/2\cdot 1\cdot x$ < $1/2\cdot 1\cdot \tan x$

A_{sektori} saadaan ympyrän alasta, nyt $A_{\text{ympyrä}} = \pi\cdot r^2 \overset{r=1}{\triangleq} \pi$:

$$\frac{A_{\text{sektori}}}{\pi\cdot r^2} = \frac{x}{2\pi r} \quad\Longrightarrow\quad A_{\text{sektori}} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot r$$

Toisaalta, koska $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, niin kaksoisepäyhtälö

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \quad < \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \quad < \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\sin x}{2} \quad < \quad \frac{x}{2} \quad < \quad \frac{\sin x}{2 \cos x} \,.$$

Edelleen, kerrotaan 2:lla ja jaetaan $\sin x$:llä (kunhan $x \neq 0 + n \cdot \pi$)

$$1 \quad < \quad \frac{x}{\sin x} \quad < \quad \frac{1}{\cos x} \,.$$

Kun nyt $x \to 0$, niin $\cos x \to 1$ ja oikea puoli, eli $\frac{1}{\cos x} \to \frac{1}{1} = 1$. Tällöin on epäyhtälön nojalla myös välitermin $\frac{x}{\sin x}$ pakko lähestyä ykköstä, siis

$$\frac{x}{\sin x} \to 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin x}{x} \to 1 \,, \qquad \text{kun } x \to 0.$$

Pitää olla samat!

Tämä on tärkeä raja-arvo, jota hyödynnetään derivoinnissa.

MAOLsta löytyy tulos kahden sinin erotukselle

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \,.$$

Tätä ja edellä saatua raja-arvoa käyttäen kirjoitetaan osamäärä $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$ toisin, saadaan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \overbrace{(x+h)}^{=\alpha} - \sin \overbrace{x}^{=\beta}}{(x+h) - x}$$

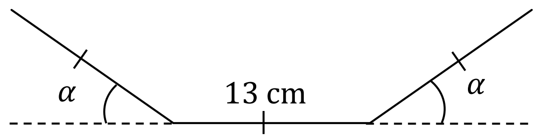
$$= \frac{2 \cos \left(\frac{(x+h) + x}{2} \right) \sin \left(\frac{(x+h) - x}{2} \right)}{h}$$

$$= \frac{2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \left(\frac{h}{2} \right)}{h} = \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

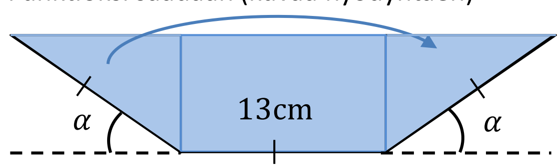
Nyt kun $h \to 0$, niin $\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to 1 \cdot \cos x = \cos x$. Siis, sinin derivaatta on kosini. Monisteessa on kosinin ja tangentin der.säännöt.

Esimerkki Soveltava (ollut koetehtävänä).

Alla oleva kuva havainnollistaa vesikourun poikkileikkausta. Millä kulman α arvolla vesikouru kuljettaa eniten vettä? (Voit olettaa, että veden virtausnopeus on vakio kaikilla kulman α arvolla.)



Veden virtausnopeus on vakio, joten kourun kuljettamaan vesimäärään vaikuttaa vain kulman α arvo. On selvää, että riittää tutkia tilannetta, jossa $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Riittää siis maksimoida vesikourun poikkipinta-ala, joka on kulman α funktio. Funktioksi saadaan (kuvaa hyödyntäen)



$A_{\text{poikkipinta-ala}}$: $A(\alpha) = \underbrace{13\text{cm} \cdot 13\text{cm} \sin\alpha}_{\substack{\text{kanta}\cdot\text{korkeus} \\ \text{keskiosa(suorakulmio)}}} + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot 13\text{cm} \sin\alpha \cdot 13\text{cm} \cos\alpha\right)}_{\substack{0{,}5\cdot\text{korkeus}\cdot\text{kanta} \\ \text{päätykolmio}}}$

$$= 169\text{cm}^2 \sin\alpha + 169\text{cm}^2 \underbrace{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}_{=\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$

$$= 169\text{cm}^2\left(\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

joten

$$A'(\alpha) = 169\text{cm}^2\left(\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot 2\right) = 169\text{cm}^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha).$$

Milloin $A'(\alpha) = 0$. Silloin, kun $\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$. Nyt koska pätee (MAOL) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, niin ehto tulee muotoon

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0.$$

Merkitään $\cos\alpha =: x$, jolloin toisen asteen yhtälön $2x^2 + x - 1 = 0$ ratkaisut ovat

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \implies x_1 = -1 \text{ tai } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Lopuksi

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \qquad \text{TAI} \qquad \cos\alpha = -1$$

Saadaan

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{3} \qquad \text{TAI} \qquad \alpha = -\pi.$$

Koska $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, niin hylätään arvot $-\frac{\pi}{3}$ ja $-\pi$.

Lasketaan lopuksi funktion $A_{\text{poikkipinta-ala}}: A(\alpha)$ arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa, saadaan

$$A_{\text{poikkipinta-ala}}:\ A(0) = 169\text{cm}^2\left(\sin 0 + \tfrac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) = 0\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{poikkipinta-ala}}:\ A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 169\text{cm}^2\left(\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 169\text{cm}^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 219{,}5\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{poikkipinta-ala}}:\ A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 169\text{cm}^2\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 169\text{cm}^2\cdot 1 \qquad = 169\ \text{cm}^2$$

Siis, kourussa kulkee eniten vettä kun kulman arvo on $\alpha = \frac{\pi}{3}$.