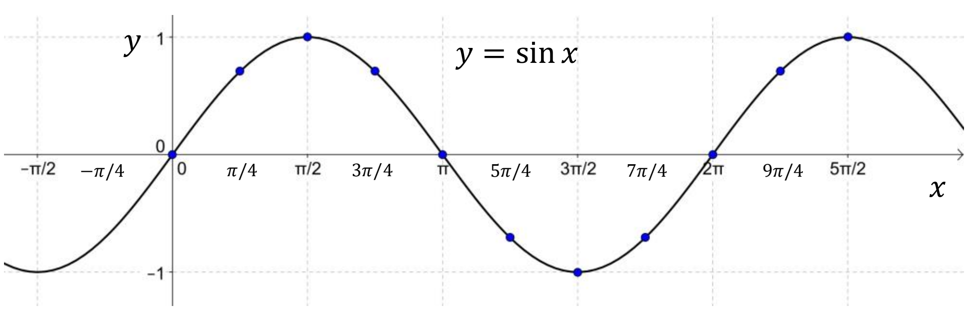
TRIGONOMETRISTEN FUNKTIOIDEN KUVAAJAT

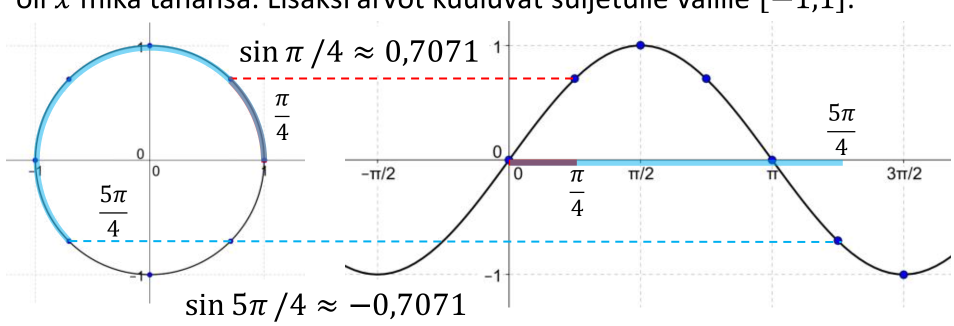
Tarkastellaan aluksi sini-funktiota ja lasketaan $\sin x$:n arvoja, kun x saa arvoja 0:sta $\frac{10\pi}{4}$:ään $\frac{\pi}{4}$ välein (huom. siirrytään käyttämään muuttujaa x muuttujan α sijaan).

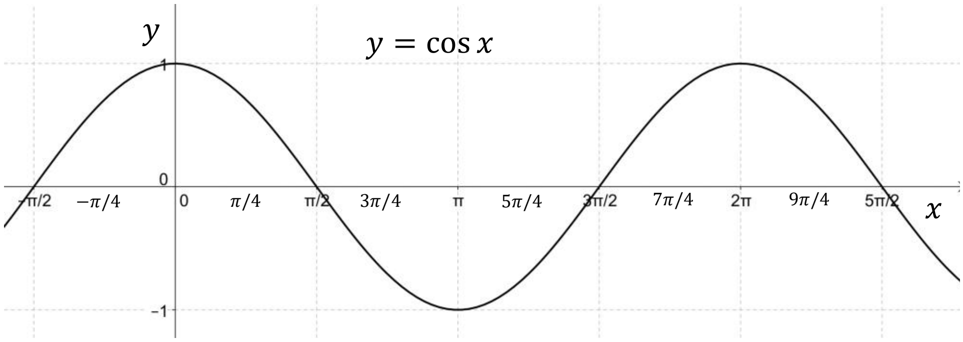
					puoli kier.				täysi kier.		
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}=\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}=2\pi$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{10\pi}{4}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Funktion arvoissa havaitaan tiettyä jaksollisuutta. Sijoitetaan arvoja vastaavat kulmat yksikköympyrään ja piirretään kuvaaja. (TAULU!)



Sini-funktion kuvaaja on aaltomainen ja siitä voidaan erottaa 2π pituinen perusjakso. Eli $\sin x$ saa samat arvot muuttujan arvoilla x ja $x + 2\pi$ oli x mikä tahansa. Lisäksi arvot kuuluvat suljetulle välille $[-1,1]$.



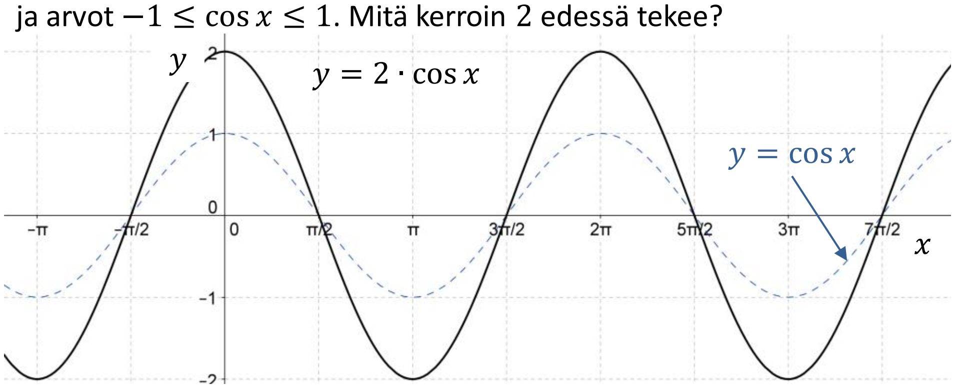


Myös kosinifunktio on aaltomainen ja jaksollinen, perusjaksona 2π. Huomaa ero sini-funktioon. Kosinin arvoille pätee $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Laajennetaan trigonometristen funktioiden kuvaajien käsittelyä.

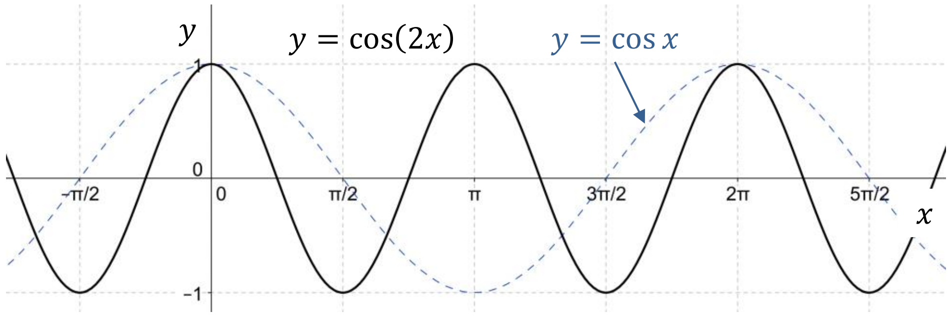
Esimerkki Piirrä funktion **a)** $2 \cdot \cos x$, **b)** $\cos(2x)$, **c)** $-2 \cdot \cos(2x)$ ja **d)** $\cos(x-2)$ kuvaaja. Mikä on perusjakso? Entäpä suurin ja pienin arvo?

a) Tiedetään, että pelkkä $\cos x$ → aaltomainen, perusjaksona 2π ja arvot $-1 \leq \cos x \leq 1$. Mitä kerroin 2 edessä tekee?



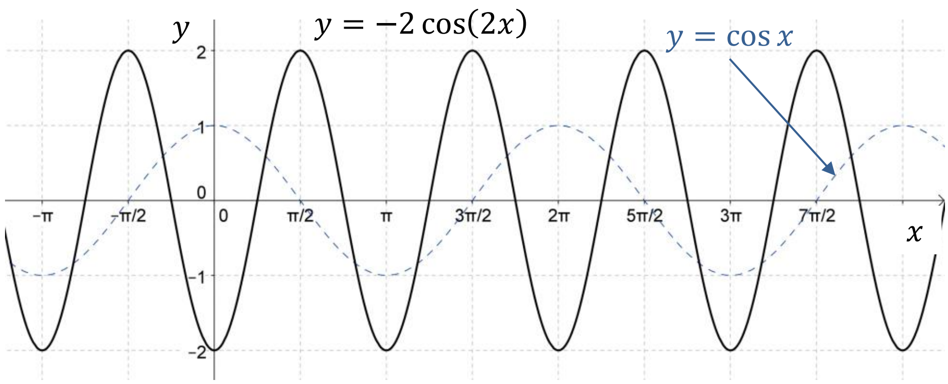
Se vaikuttaa amplitudiin eli "aallon" korkeuteen x-akselista. Toisaalta aallon "taajuus" eli heilahtelunopeus pysyy vakiona, etukerroin ei vaikuta taajuuteen. Perusjakso säilyy 2π:nä. Suurin arvo on 2 ja pienin -2.

b) $\cos(2x)$ → aaltomainen, arvot $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$. Mitä kerroin 2 nyt tekee? Lasketaan arvoja:
Kun $x = \pi$, niin $2x = 2\pi$, kun $x = 2\pi$, niin $2x = 4\pi$ ja edelleen kun $x = \pi/2$, niin $2x = \pi$, kun $x = \pi/4$, niin $2x = \pi/2$.



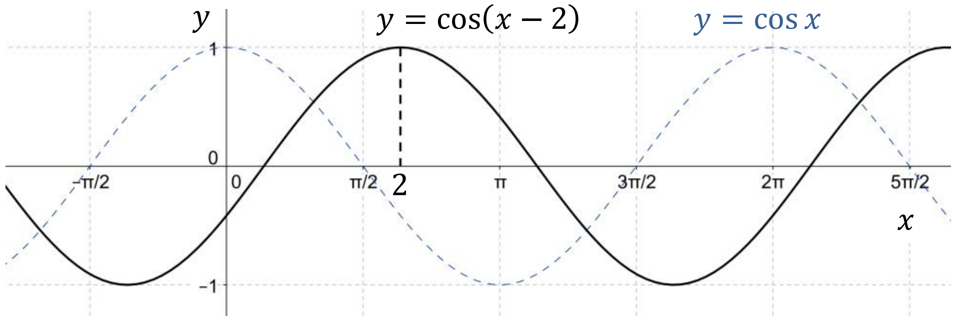
Se vaikuttaa ”taajuuteen” eli heilahteluun (heilahtelunopeuteen). Mitä isompi (> 1) on kerroin sitä nopeammin eli tiheämmin kuvaaja (aalto) heilahtelee ylös-alas tietyn jakson aikana. Vastaavasti mitä pienempi $\begin{pmatrix} < 1 \\ > 0 \end{pmatrix}$ on kerroin sitä hitaammin kuvaaja heilahtelee. Perusjakso muuttuu, mutta amplitudi pysyy samana, $-1 \leq \cos(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $-2\cos(2x)$ → aaltomaisuus, amplitudi 2-kertainen, taajuus 2-kertainen. Mitä miinus tekee?



Se peilaa kuvaajan x-akselin suhteen. Katsotaan lopuksi mitä summaus tai erotus kosinin ”sisällä” tekee.

d) $\cos(x-2)$ → aaltomaisuus, amplitudi 1-kertainen, taajuus 1-kertainen, koska x:n kerroin on yksi.



Se siirtää kuvaajaa vaakatasossa x-akselilla. Jos erotus niin oikealle (posit.) suuntaan ja jos summaus niin vasemmalle (negat.) suuntaan.

Yleisesti trigonometriset funktiot (sini ja kosini) esitetään muodossa:

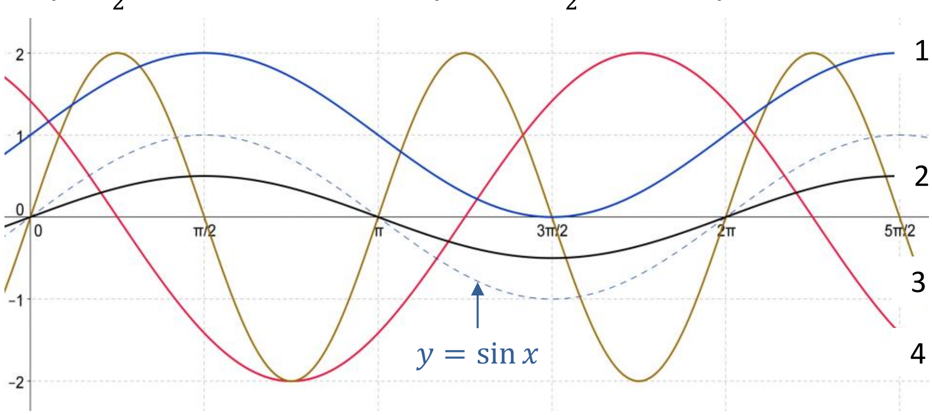
$$A \cdot \sin(bx-c)+d, \qquad A \cdot \cos(bx-c)+d,$$

missä parametri (muuttuja) A kertoo "aallon" amplitudin eli korkeuden, b aallon "taajuuden" eli heilahtelunopeuden ja c vaakasiirron ja d pystysiirron suuruuden. Entäpä, millainen on $\sin(x^2)$:n tai $\sin^2 x$:n kuvaaja?

Esimerkki Minkä käyrän 1-4 yhtälö on

a) $y = -2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, **b)** $y = 2\sin(2x)$, **c)** $y = 1+\sin x$,

d) $y = \frac{1}{2}\sin x$, **e)** $y = 2\sin\frac{x}{2}$, **f)** $y = \sin(\sin x)$?



Käyrä 1 on **c)** $y = 1+\sin x$. Käyrä 2 on **d)** $y = \frac{1}{2}\sin x$.

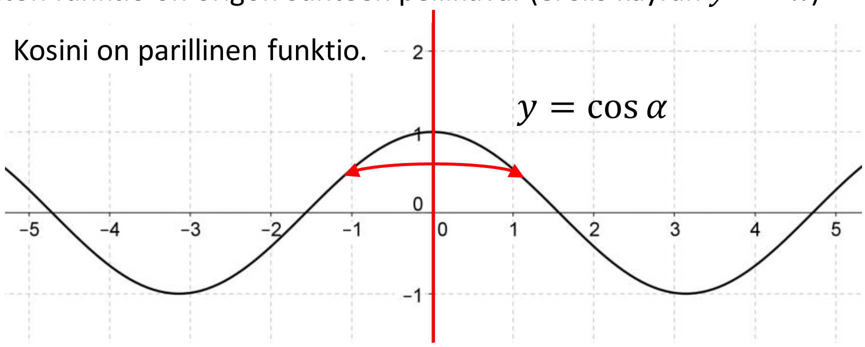
Käyrä 3 on **b)** $y = 2\sin(2x)$. Käyrä 4 on **a)** $y = -2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Määritelmä:
Funktiota f sanotaan *parilliseksi* jos $f(x) = f(-x)$ ja *parittomaksi*, jos $-f(x) = f(-x)$ kaikilla funktion f määrittelyjoukkoon $\mathcal{M}_f$ kuuluvilla muuttujan x arvoilla.

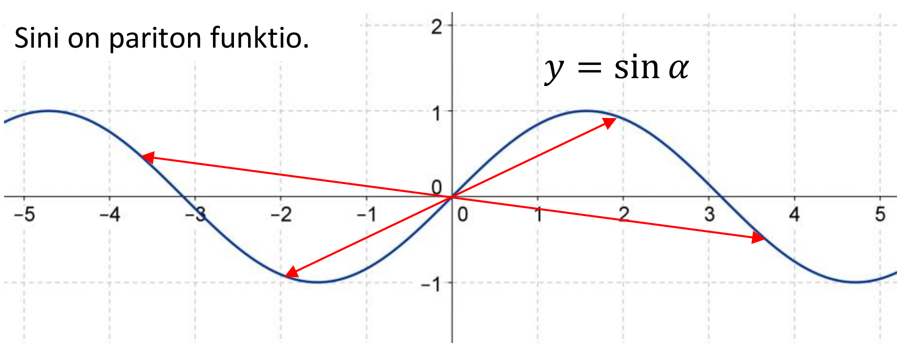
Kosini-funktion on parillinen, kun taas sini- ja tangenttifunktio ovat parittomia.

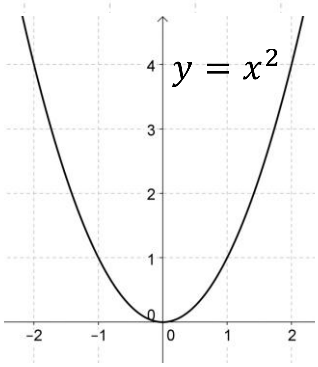
Parillinen funktio on y-akselin suhteen peilikuva itsensä kanssa ja pariton funktio on origon suhteen peilikuva. (ei siis käyrän $y = -x$)

Kosini on parillinen funktio.



Sini on pariton funktio.





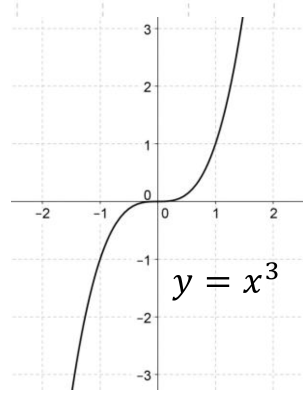
Vastaavasti funktio

$$f\colon f(x) = x^2$$

on parillinen ja

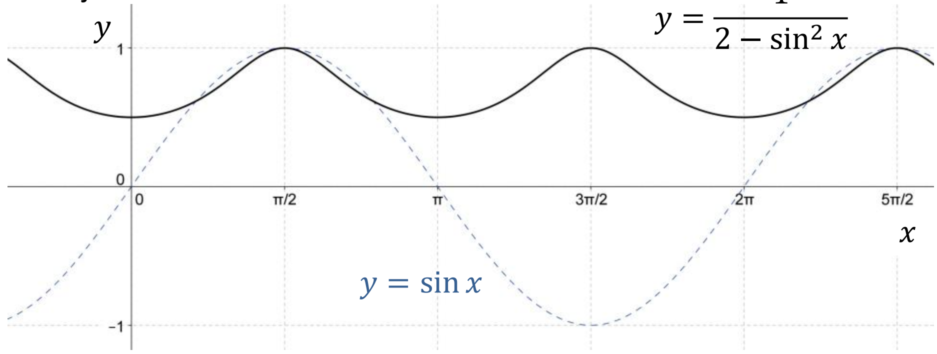
$$f\colon f(x) = x^3$$

on pariton.



Esimerkki Määritä funktion f suurin ja pienin arvo ja perusjakso.
a) $f\colon f(x) = 2\cos x$, **b)** $f\colon f(x) = 7 - 3\sin x$ ja **c)** $f\colon f(x) = \frac{1}{2-\sin^2 x}$.

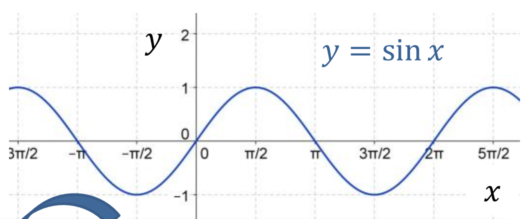
a) $\max_f = 2,\ \min_f = -2$ ja perusjakso 2π.
b) $\max_f = 10,\ \min_f = 4$ ja perusjakso 2π.
c) Nyt nimittäjässä oleva termi $\sin^2 x$ saa arvoja väliltä $[0,1]$, joten nimittäjä saa arvoja väliltä $[1,2]$. Näin ollen $\max_f = 1,\ \min_f = 1/2$ ja perusjakso π.
Kuvaaja on mielenkiintoisen näköinen.

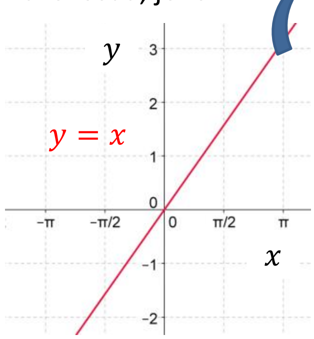


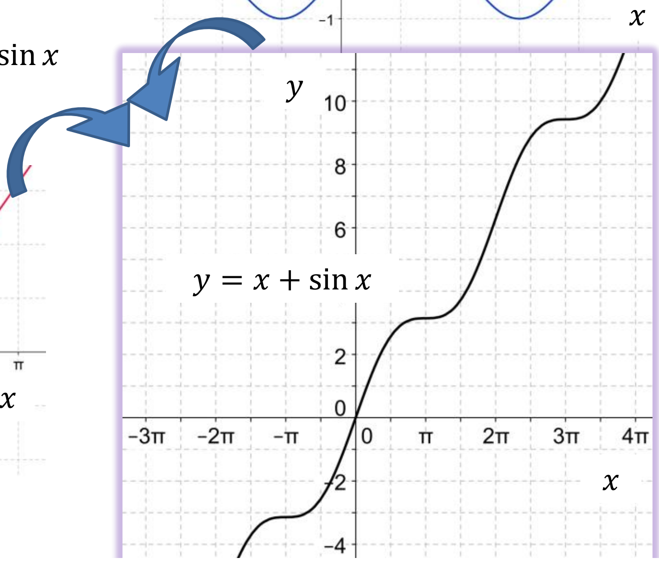
Esimerkki On hyvä osata hahmottaa mikä osa funktiosta saa mitäkin aikaan kuvaajassa. Tarkastellaan funktiota

$$f\colon f(x) = x + \sin x$$

Kaksi osaa, jolloin…







Esimerkki Kuten edellä, nyt funktiota $f: f(x) = 3\sin x - \cos(2x) - 2$.