TRIG. YHTÄLÖT

Määritelmä, trigonometrinen yhtälö:
Yhtälöä sanotaan *trigonometriseksi yhtälöksi*, jos yhtälön tuntematon (usein x, joskus α) eli se, jolle etsitään yhtälön kautta ratkaisua, on trigonometrisen funktion *muuttujana*.

Esimerkki Yhtälöt

$$\sin x = \sqrt{3}/2, \qquad \tan(2x) - \cos^2 x = 0, \qquad \sin x = \cos x$$

ovat trigonometrisia yhtälöitä.

Huom. Yhtälö

$$\overbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}^{=1} - 4 = 2x - 1$$

ei ole trigonometrinen, vaikka siinä sini esiintyy, sillä $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ on vain luku ja tuntematon (eli x) ei ole minkään trig.funktion muuttujana.

Trigonometriset yhtälöt voidaan jakaa kolmeen kategoriaan.

1) Perusyhtälöt:

$$\sin\alpha = A, \qquad \cos\alpha = A, \qquad \tan\alpha = A \quad \text{ja} \quad \cot\alpha = A,$$

missä $A \in \mathbb{R}$ on jokin luku. Muista $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ eli $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Esimerkki $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x - 2 = \frac{\pi}{5}$.

2) Yleiset yhtälöt:

$$\sin\alpha = \sin\beta\,, \qquad \cos\alpha = \cos\beta\,, \qquad \tan\alpha = \tan\beta\,,$$

Kotangentti menee samalla tavalla kuin tangentti.

Esimerkki $\sin 2x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos(2x) = \sin x$.

3) Muunnos- summa ja palautuskaavoja, MAOL:
Kaksinkertaisen kulman kaavat, yhteen- ja vähennyslaskukaavat, jne.
Esimerkki $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$ tai tärkeä kaava $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$

Tärkeää trig. yhtälöissä on lähes aina ratkaisujen ääretön lukumäärä, mikä johtuu trig.funktioiden jaksollisuudesta. Merkintä $n \in \mathbb{Z}$ tms.

Tämän vuoksi, kun on löydetty yksi yhtälön ratkaisu, on yleiseen ratkaisuun liitettävä jakso.

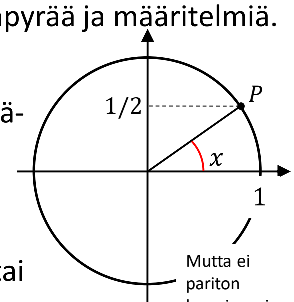
Esimerkki

yksityisratkaisu jakso Ratkaisuja on ∞ paljon.

$$\begin{aligned} x &= \boxed{\frac{\pi}{2}} + \boxed{n\cdot\pi,} \quad \boxed{n\in\mathbb{Z},} \quad \text{tai} \\ x &= \boxed{\pm\frac{\pi}{3}} + \boxed{n\cdot\frac{3\pi}{4},} \quad \boxed{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Tilanne, jolloin ei ole ∞ monta ratkaisua, on esim. silloin kun tehtävänannossa on rajoitettu tietylle välille. Trigonometrisia yhtälöitä ratkaistaessa (ja muutenkin) kannattaa hyödyntää 1-ympyrää ja määritelmiä.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $\sin x = \frac{1}{2}$.



Eli, millä kulman x arvolla yksikköympyrän kehäpisteen P y-koordinaatin arvo on puoli?

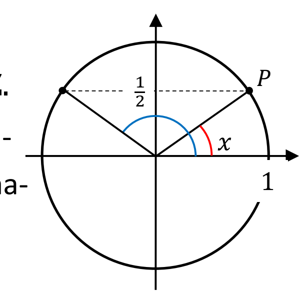
→ $x = \frac{\pi}{6}$ (tai $x = 30°$)

→ Jaksollisuus: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ käy myös tai yhtä hyvin $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi$...tai jopa $x = \frac{\pi}{6} + 254\pi$.

Mutta ei pariton kerroin, esim. $x = \frac{\pi}{6} + 3\pi$

Saadaan yleinen ratkaisu:

$$x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$



Mutta toisaalta sinifunktion ominaisuudesta seuraa, että $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ antaa myös y-koordinaatin arvoksi $\frac{1}{2}$ (muista $\sin x = \sin(\pi - x)$), joten

$$x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Yhdistetään tiedot lopulliseen vastaukseen. (Onko muita kulmia x, joille $\sin x = \frac{1}{2}$?) Ei ole.

$$\sin x = \frac{1}{2}, \qquad \text{kun} \quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi \end{cases}, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

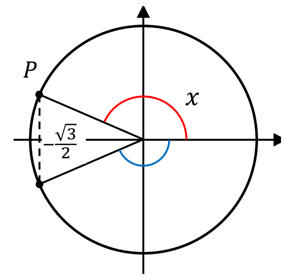
Tämä x voitaisiin merkitä myös esim. α:lla

Esimerkki Ratkaise yhtälö $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Eli millä kulman x arvolla 1-ympyrän kehäpisteen P x-koordinaatin arvo on $-\frac{\sqrt{3}}{2}$? Huom. eri x:t!

→ $x = \frac{5\pi}{6}$ (tai $x = 150°$)

→ Jaksollisuus: $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Myös $x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ käy ratkaisuksi kosinin ominaisuuden $\cos x = \cos -x$ myötä.



Vastaus

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{TAI} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Joka voidaan kirjoittaa lyhyemmin $x = \pm\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Huomautus Kuten yleisesti, niin myös trig.yhtälöissä, ”hahmota ja pelkistä” tarvittaessa tehtävänanto helpommaksi → esim mitä huomaat?

$$2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad 2y^2 + y + 1 = 0$$

Merkitään $\sin x = y$, saadaan 2. asteen yhtälö