Matematiikan TESTI 4, Maa7 – Trigonometriset funktiot – RATKAISUT **Sievin lukio**
II jakso/2017
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Muodosta yhdistetyn funktion $u \circ s$ lauseke $u(s(x))$. **(2p)**

i) $u(x) = x^2$ **ja** $s(x) = -3x + 7$

$$u(s(x)) = u(-3x+7) = (-3x+7)^2 = 9x^2 - 42x - 49$$

ii) $u(x) = -3x + 7$ **ja** $s(x) = x^2$

$$u(s(x)) = u(x^2) = -3x^2 + 7$$

b) Ilmoita lausekkeet $u(x)$ ja $s(x)$. **(2p)**

i) $u(s(x)) = (-x+5)^3$

$$u(x) = x^3 \quad \text{ja} \quad s(x) = -x + 5$$

ii) $u(s(x)) = \sqrt[5]{2x^2 - 7}$

(jos löydät kaksi eri tapaa, niin +1 p)

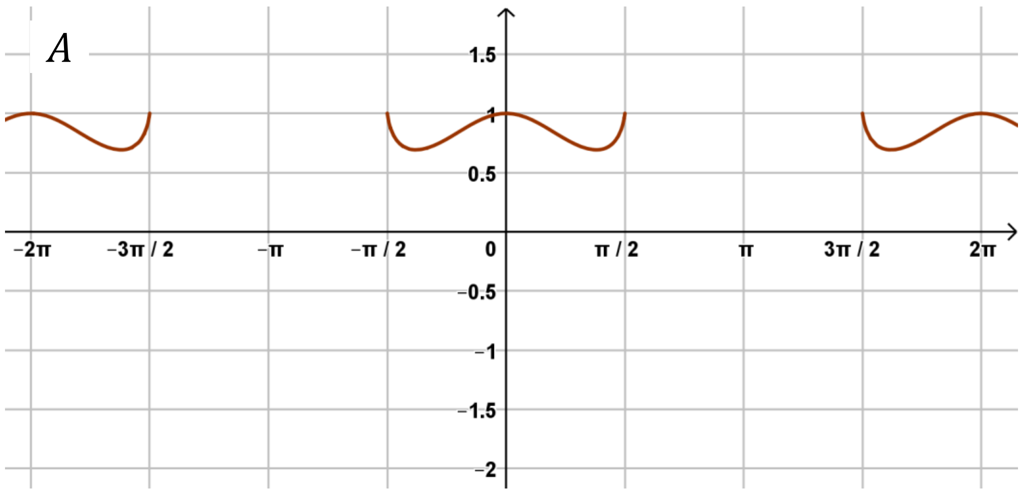
$$u(x) = \sqrt[5]{x} \quad \text{ja} \quad s(x) = 2x^2 - 7$$

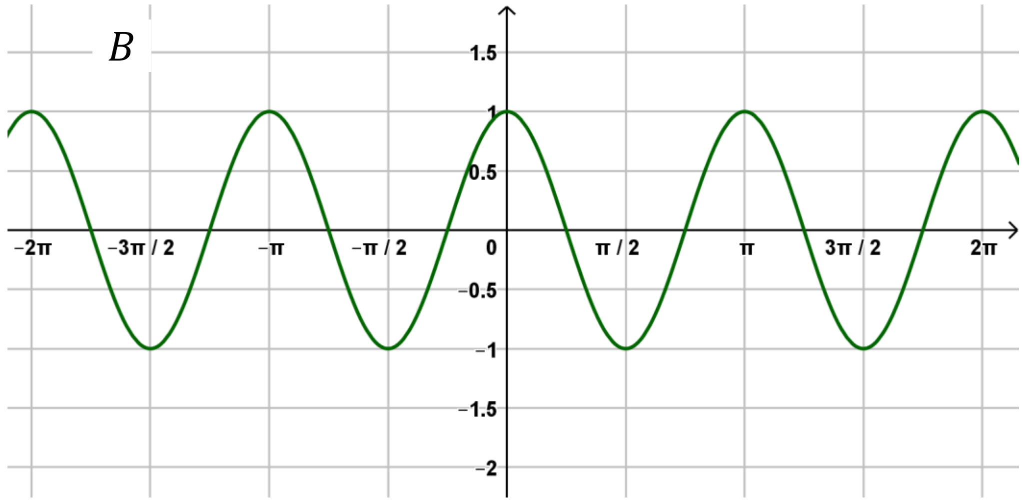
$$u(x) = \sqrt[5]{2x - 7} \quad \text{ja} \quad s(x) = x^2$$

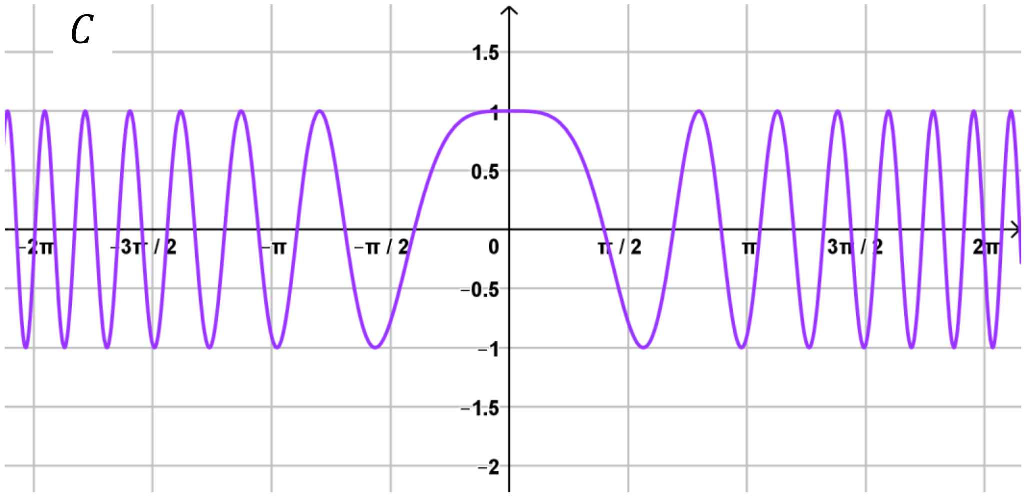
c) Yhdistä yhdistetyn funktion lauseke sen kuvaajaan, esim. $(u \circ s)(x) - A$. Perustele lyhyesti (1-2 virkettä), miksi teit kyseisen valinnan. Huom! Palauta mieleen aikaisempien kurssien 1-6 tiedot. (2p)

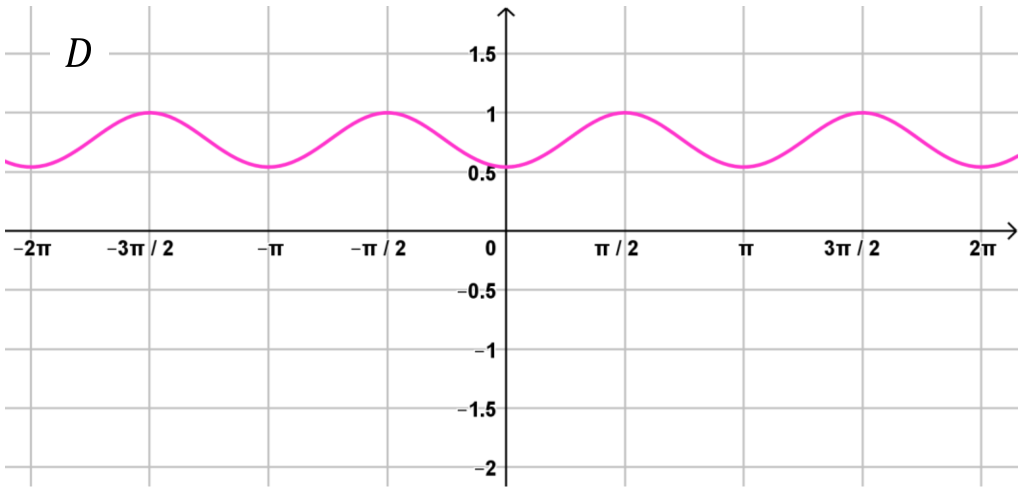
$(u \circ s)(x) = \cos 2x$ $(f \circ h)(x) = (\cos x)^{\cos x}$

$(k \circ l)(x) = \cos x^2$ $(m \circ p)(x) = \cos(\cos x)$









VASTAUS: $(u \circ s)(x) - B$, $(f \circ h)(x) - A$, $(k \circ l)(x) - C$, $(m \circ p)(x) - D$

PERUSTELUJA: **Eka funktio $(u \circ s)(x)$ on ns. helpoin ja tutuin joten otetaan se ensiksi pois. Siis jakso on puolet ”peruskosinista”, amplitudi on 1, eli kuvaaja B. Seuraava funktio $(f \circ h)(x)$ on ehkä vaikein. Tässä pitää nähdä muoto eli ”jotain potenssin jotain”. Ja koska eksponentti saa reaalisia arvoja (väliltä $[-1, 1]$), niin ko. funktio on määritelty vain kun kantaluku on positiivista (ykköskurssin asioita). Siksi kuvaajassa on ns. aukkoja. Sitten funktio $(k \circ l)$, joka heilahtelee sitä tiheämmin mitä isompi muuttuja x on, asia selvä. Jäljelle siis jää funktion $(m \circ p)(x)$ kuvaaja. Sen voisi perustella myös esim. näin. Koska $\cos(x) = 0$, kun $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ niin $\cos(\cos x) = 1$, kun $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$**

/6

2. a) Määritä/Laske (ei tarvitse tehdä määritelmän kautta). Ei tarvitse sieventää loppuun. (2p)

i) $D(x^3+5)^4 = 4(x^3+5)^3 \cdot 3x^2 = 12x^2(x^3+5)^3$

ii) $D\cos^3(-4x) = 3\cos^2(-4x)\cdot(-\sin(-4x))\cdot(-4)$

iii) $D\frac{\sin 2x}{x} = \frac{\cos 2x\cdot 2\cdot x - \sin 2x\cdot 1}{x^2} = \frac{2x\cdot\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$

iv) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, kun $f(x) = \tan 2x$. (Palauta mieleen muistikolmio tai katso MAOL/taulukot.com)

Aluksi, koska $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2 = \frac{2}{\cos^2 2x}$, joten

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\cos^2\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{(-1/2)^2} = \frac{2}{1/4} = 8$$

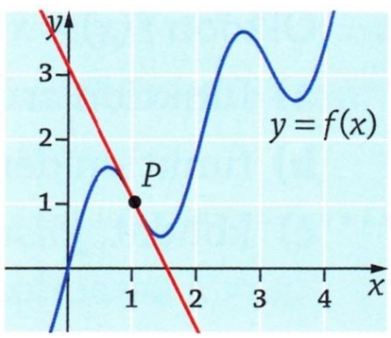
b) Millä muuttujan x arvoilla funktion i) $f\circ g$ ja ii) $g\circ f$ arvot voidaan laskea, kun $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ ja $g(x) = x^2 - 4$ (2p)

Nimittäjä ei saa olla nolla, siis

$$(f\circ g)(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2$$

$$(g\circ f)(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0$$

c) Kuvassa on funktion $f: f(x) = x + \sin 3x$ kuvaajalle pisteeseen P asetettu tangentti. Tangentin kulmakerroin on -2. (2p)



i) Määritä pisteen P koordinaatit.

ii) Mikä on tangentin yhtälö?

HUOM! Kuvasta ei saa lukea tietoja, eli P:n x-koordinaatti ei ole 1.

i) Koska derivaatan arvo pisteessä P on -2, niin pätee

$$f'(x) = 1 + \cos 3x\cdot 3 = -2$$

Tästä seuraa, että $\cos 3x = -1$, eli $3x = \pi + n\cdot 2\pi$. Siis $x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\frac{2\pi}{3}$. Näistä valitaan (kuvaajaa hyödyntäen, eli nyt pitää hyödyntää kuvaajaa) se x:n arvo, joka on lähinnä arvoa 1, eli $\frac{\pi}{3}$.

Pisteen P x-koordinaatin arvo on $\frac{\pi}{3}$ ja y-koordinaatin arvoksi tulee

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\pi = \frac{\pi}{3}$$

Näin ollen $P = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

ii) Tangentti, eli suora, joten sen yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_0)$, missä $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ja $y_0 = f(x_0) = \frac{\pi}{3}$ ja $k = -2$. Näin ollen

$$y - \frac{\pi}{3} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + \pi$$

Huomaa, että suoran yhtälö vastaa kuvaajassa olevaa tangentin tietoja.

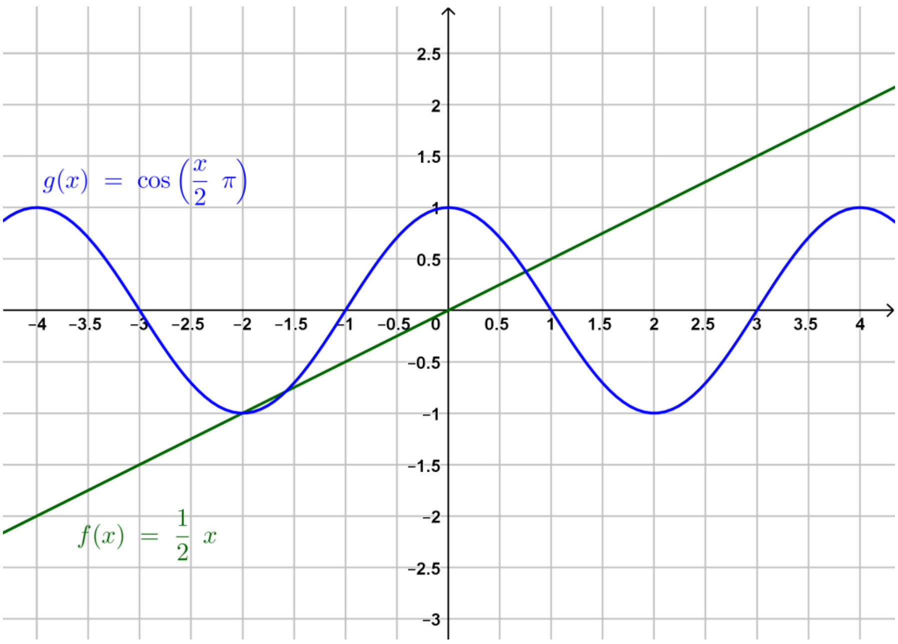
/6

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. a) Olkoot $f\colon f(x) = \frac{1}{2}x$ ja $g\colon g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\cdot\pi\right)$ sekä tarkastellaan tilannetta välillä $[-4, 4]$. Määritä

i) $f(2)$, ii) $g\big(f(2)\big)$, iii) $f\big(g(2)\big)$, iv) $g\big(f(4)\big)$, v) $g'\big(f(4)\big)$, vi) yhtälön $g'\big(f(4)\big) = g\big(f(x)\big)$ ratkaisut.

Voit hyödyntää alla olevia kuvaajia. **(3p)**



i) $f(2) = 1$, esim. kuvaajalta luettu perustellen tai laskettu $f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

ii) $g(f(2)) = g(1) = 0$, esim. kuvaajalta luettu perustellen (ensin hyödynnetty i)-kohtaa) tai laskettu $g(1) = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = .$

iii) $f(g(2)) = f\left(\cos\left(\frac{2}{2}\cdot\pi\right)\right) = f(\cos\pi) = f(-1) = -\frac{1}{2}$, tai kuvaajilta luettu perustellen.

iv) $g(f(4)) = g\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right) = g(2) = \cos\left(\frac{2}{2}\cdot\pi\right) = -1$, tai kuvaajilta luettu perustellen.

v) $g'(f(4))$ koska $g'(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\cdot\pi\right)\cdot\frac{\pi}{2}$, niin $g'\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right) = g'(2) = -\underbrace{\sin\left(\frac{2}{2}\cdot\pi\right)}_{=0}\cdot\frac{\pi}{2} = 0$, tai funktion g kuvaajalta luettu: "laaksonpohjassa" hetkellinen muutosnopeus on nolla → tangentti on x-akselin suuntainen, eli kulmakerroin on nolla.

vi) $g'(f(4)) = g(f(x))$, eli muodostuu yhtälö (hyödynnetään iv)-kohtaa)

$$0 = \cos\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2}\cdot\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\cdot\pi\right).$$

Kosini on nolla, kun kulmaosa on $\frac{\pi}{2} + n\pi$. Saadaan yhtälö

$$\frac{x}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 + 4n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Näistä tarkasteluvälille $[-4, 4]$ kuuluvat arvot $x = -2$ ($n = -1$) ja $x = 2$ ($n = 0$).

Tai muuten perustellen, esim. kuvaajia käyttäen.

b) Osoita, että funktio $f: f(x) = 2x + 2 + \sin 2x$ saa arvon 1000 täsmälleen kerran. Ohje: muodosta funktio $g: g(x) = f(x) - 1000$ ja tutki kuinka monta 0-kohtaa tällä on. (3p)

Funktio $g: g(x) = 2x + \sin 2x - 998$ on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (MIKSI?) Näin ollen

$$g'(x) = 2 + 2\cdot\underbrace{\cos 2x}_{\in[-1,1]},$$

joten $g'(x) \geq 0$ aina. Siis g on aidosti kasvava kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Muista, että derivaatan nolla-arvo yksittäisissä kohdissa ei tuhoa aitoa monotonisuutta. Siis aito monotonisuus takaa *korkeintaan* yhden 0-kohdan funktiolle g. Koska lisäksi (kokeilua…)

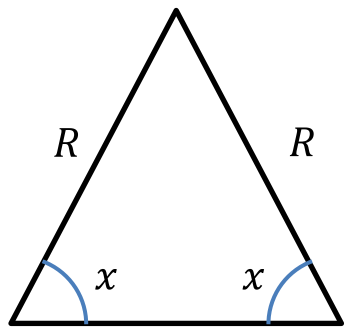
$$g(0) = -998 < 0$$
$$g(500) = 2 + \underbrace{\sin 1000}_{\in[-1,1]} > 0$$

niin funktiolla g on Bolzanon nojalla *ainakin* yksi 0-kohta välillä $]0, 500[$.

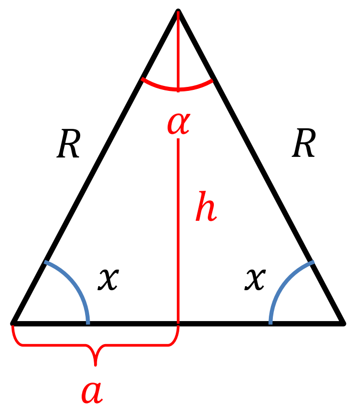
Yhteensä *täsmälleen* yksi 0-kohta ja näin ollen funktio f saa arvon 1000 täsmälleen kerran.

/6

4. **Miten suureksi tulee valita tasakylkisen kolmion kantakulma x (katso kuva), jotta kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri? Mikä on tällöin huippukulman suuruus ja kolmion kannan pituus?** **(6p)**



Merkitään kolmion korkeutta h:lla ja kannan puolikasta a:lla, katso kuva. Saadaan kolmion pinta-alafunktio



$$A: A(a,h) = a \cdot h, \qquad (2\ \text{muuttujaa})$$

Pyritään ilmaisemaan pinta-ala vain yhden muuttujan avulla ja siihen tehtävänannon mukaisesti käytetään kulmaa x. Nimittäin havaitaan, että

$$a = \cos x \cdot R \qquad \text{ja} \qquad h = \sin x \cdot R$$

Näin ollen

$$A: A(x) = \cos x \cdot R \cdot \sin x \cdot R = R^2 \sin x \cos x, \qquad (1\ \text{muuttuja})$$

joka on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Eli A_{max}/ A_{min} löytyvät näin ollen niistä derivaatan 0-kohdista, jotka kuuluvat välille (mille välille???) tai välin päätekohdista. Tilanne huomioiden järkevä tarkasteluväli muuttujalla x on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, vaikka funktio A on hyvin määr., jav&dva $x \in \mathbb{R}$.

Saadaan (tulofunktion derivointisääntöä käyttäen tai laskinta käyttäen)

$$A'(x) = R^2(\cos^2 x - \sin^2 x) = R^2 \cos 2x$$

ja $A'(x) = 0$, kun $\cos 2x = 0$, eli kun $2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Siis $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$. Näistä mahdollisista x:n arvoista välille $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kuuluu vain $x = \frac{\pi}{4}$.

Merkkikaaviota tai testiarvoja laskien saadaan, että kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$ on pinta-alafunktion A maksimikohta.

Testiarvot: $A'\left(\frac{\pi}{6}\right) = R^2 \cos\frac{\pi}{3} > 0$ ja

$$A'\left(\frac{\pi}{3}\right) = R^2 \cos\frac{2\pi}{3} < 0$$

Näin ollen

$$A(0) = R^2 \underbrace{\sin 0}_{=0} \cos 0 = 0$$

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = R^2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} = R^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R^2}{2}$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = R^2 \sin\frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} = 0$$

Tulkinta: Kun $x = 0$, niin kolmion korkeus h on nolla. Pinta-ala on tietenkin nolla. Kun $x = \frac{\pi}{2}$, niin pikkukolmion kanta a on nolla. Pinta-ala on jälleen tietenkin nolla.

Lopuksi: Huippukulman arvoksi tulee $\alpha = \pi - 2x = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ eli $90°$ ja kannan pituudeksi $2a = 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot R = \sqrt{2}R$.

/6
/24