

Tehtävien ratkaisut tulee olla esim. Libre officen -writer ohjelmalla tehtyjä. Liitä vastauksiisi kuvia GeoGebrasta ja esim. TI-nSpire ohjelmalla tuotettuja matemaattisia ratkaisuja.

1. a) Yksikköympyrä on tullut tutuksi ja ymmärrämme, että 1-ympyrän kehän jokainen piste on annetun kulman x avulla muotoa $P = (\cos x, \sin x)$. Siis 1-ympyrä saadaan parametrimuotoisen funktion

$$f: f(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

kautta piirrettyä. Piirrä seuraavat funktiot ja pohdi eroavaisuuksia 1-ympyrään.

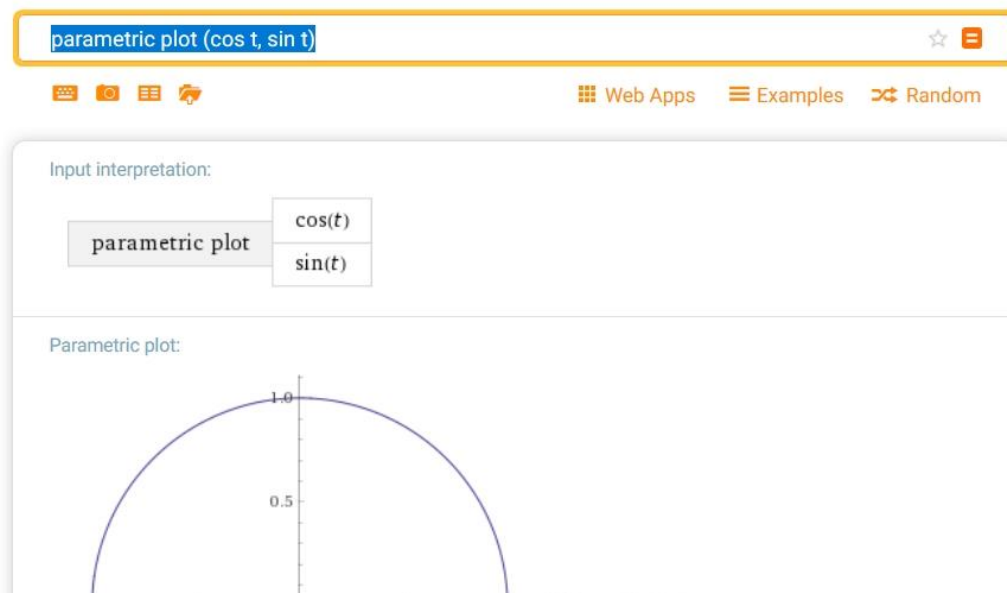
$$g: g(t) = (2 \cdot \cos t, 2 \cdot \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$h: h(t) = (3 \cdot \cos t, 5 \cdot \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$k: k(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{9\pi}{5}\right]$$

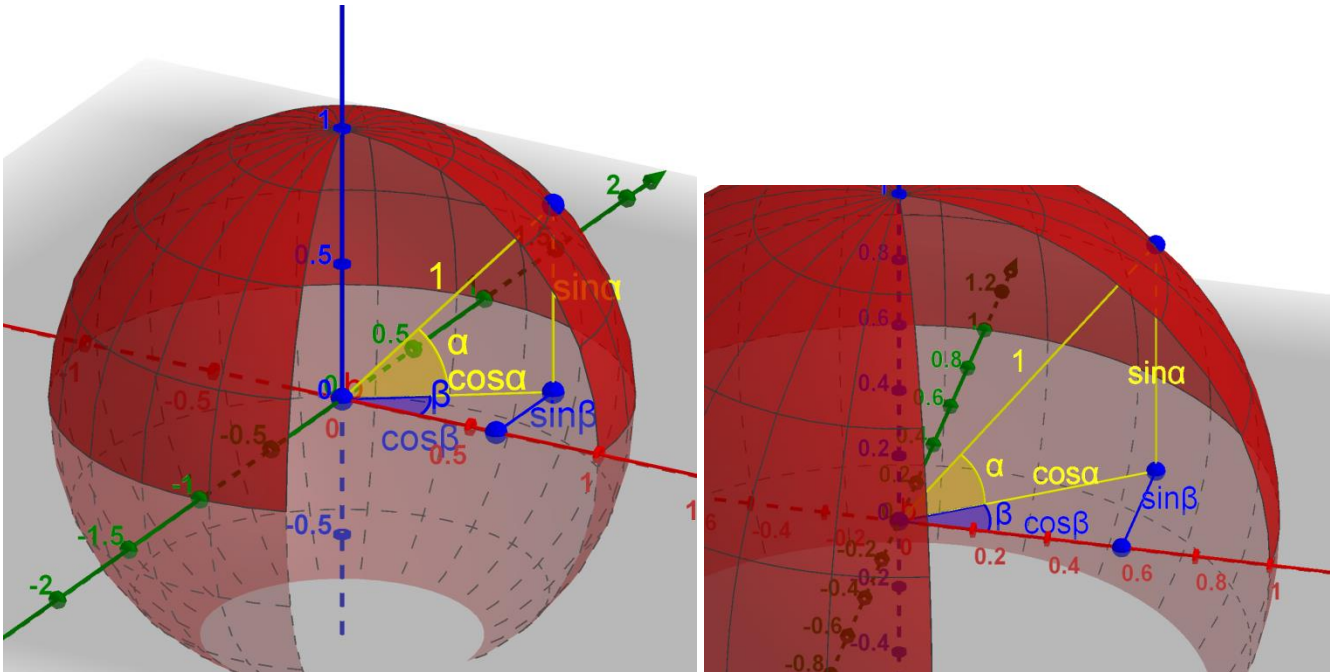
$$n: n(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{7}\right]$$

Parametrimuotoisen käyrän saat piirrettyä seuraavasti. GeoGebran syöttökenttään kirjoita **a = Käy-
rä[(x-koord., y-koord., z-koord.), parametri (usein t), parametrin alkuarvo, parametrin lop-
puarvo]**, siis esim. **g = Käyvä[(2cos(t), 2sin(t)), t, 0, 2π]**. Parametrimuotoisen käyrän saat myös
hyödyntämällä nettisivua <https://www.wolframalpha.com> ja komentoa ParametricPlot. Kirjoita syöttö-
kenttään esim. parametric plot (cos t, sin t) ja paina enter.



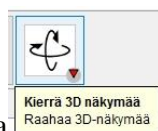
b) Laajennetaan tilanne 3-ulotteiseksi. Mikä voisi olla yksi säteisen pallon eli 1-pallopinnan parametri-
nen muoto, jossa käytetään trigonometrisia funktioita? 1-Ympyrästä on hyvä lähteä liikkeelle, mutta
kuinka saadaan z-koordinaatin parametrimuoto? Ja miten saadaan ympyrät surkastumaan pisteeksi, kun
lähestytään ”päiväntasaajalta = ympyrä” kohti ”pohjois- ja etelä napoja = piste”?

Katso kuvia alla avuksesi

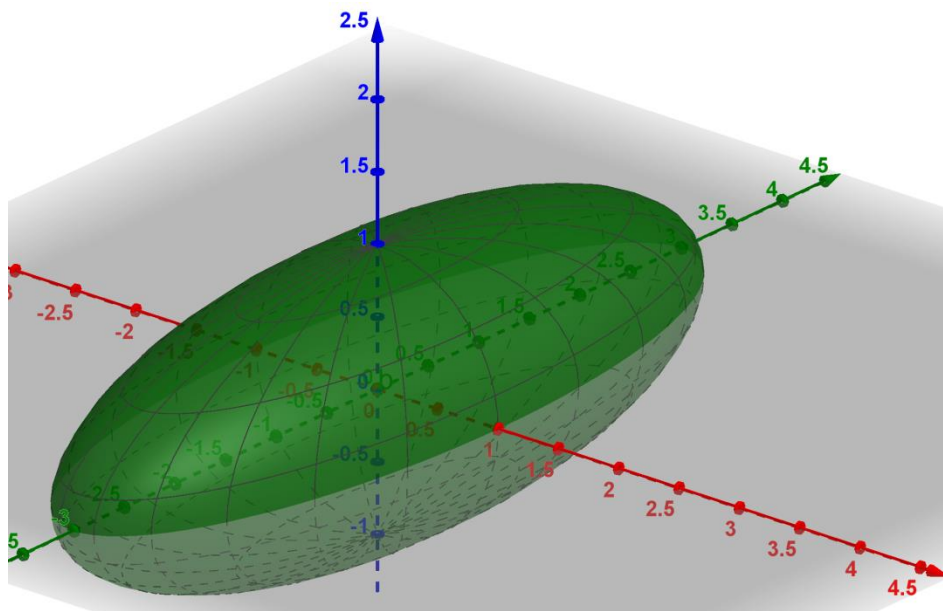


GeoGebran syöttökenttään kirjoita:

`b=Pinta(<Lauseke>, <Lauseke>, <Lauseke>, <Parametrimuuttuja 1>, <Alkuarvo>, <Loppuarvo>, <Parametrimuuttuja 2>, <Alkuarvo>, <Loppuarvo>)`



(muista pyöritellä koordinaatistoa): Mikä voisi olla kyseisen ovaalinpinnan parametrimuoto?



2. Kerrataan lyhyesti kompleksiluvut. Lukujoukoista

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

kompleksilukujen joukko

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ ja } i \text{ on imaginaariyksikkö} \}$$

on laajin.

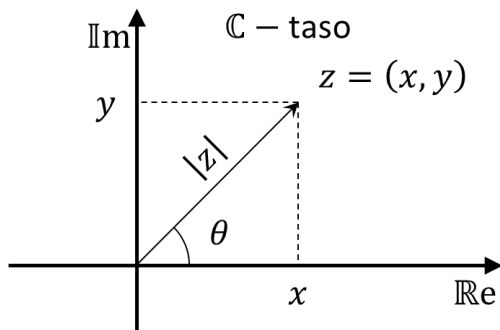
Kompleksiluvut ovat siis muotoa $z = x + iy$ (tai $z = x + yi$) ja puhutaan \mathbb{C} -tasosta, joka samaistetaan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -tasoon, sillä erotuksella, että \mathbb{C} -tasossa on ns. kompleksinen struktuuri (rakenne) $i^2 = -1$.

Akselit ovat:

Reaaliakseli = vaaka-akseli

Imaginaariakseli = pystyakseli

Taso on joko \mathbb{C} -taso tai z -taso.



Kompleksiluku voidaan siis esittää kahdella tavalla: $z = x + iy$ eli suorakulmaisissa koordinaateissa tai napakoordinaateissa. Näiden välinen yhteys lähtien suorakulmaisista koordinaateista on

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta,$$

josta saadaan z :n esitys napakoordinaateissa $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Tehtävä a) Esitä napakoordinaateissa luku $z = 1 + i\sqrt{3}$. Muista, että kulman θ saat tangentin avulla.

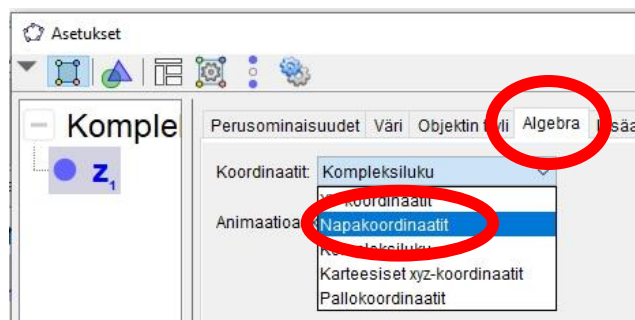
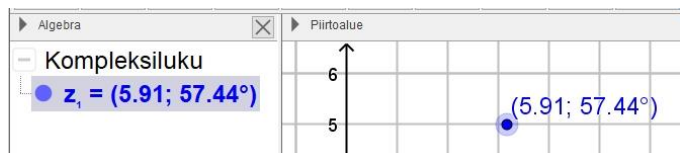
b) Esitä suorakulmaisissa koordinaateissa luku $z = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$.

c) Aukaise geogebra ja lisää kompleksiluku (täppää piirtoaluetta) →

Kun olet saanut jonkun pisteen (kuten alla $z_1 = 3.18 + 4.98i$),



niin paina algebraikkunasta hiiren kakkospainikkeella ominaisuudet ja sieltä algebra-välilehdeltä valitse napakoordinaatit. Tulisi näyttää tältä:



→ Tarkista geogebralla, että laskit yllä **a)**- ja **b)**-kohdat oikein.

3. (Vapaaehtoinen) 1-tehtävässä saatiin pallon pinta sinin ja kosinin avulla määritettyä. Laajennetaan tätä ideaa ja tehdään Star Wars – elokuvista tuttu Kuolemantähti, katso kuva.

Haaste näyttäisi olevan kuinka tehdään ”kuoppa” pallon pintaan.

Geogebraa avauksessa 3D näkymä ja 2D näkymän voit sulkea.

Kirjoita syöttökenttään ensin pallon pinta leikattuna ”pohjoiskalotilla”:

```
b: Pinta(cos(u) cos(v), cos(u) sin(v), sin(u), u,
(-pi) / 2, pi / 3, v, 0, 2pi)
```

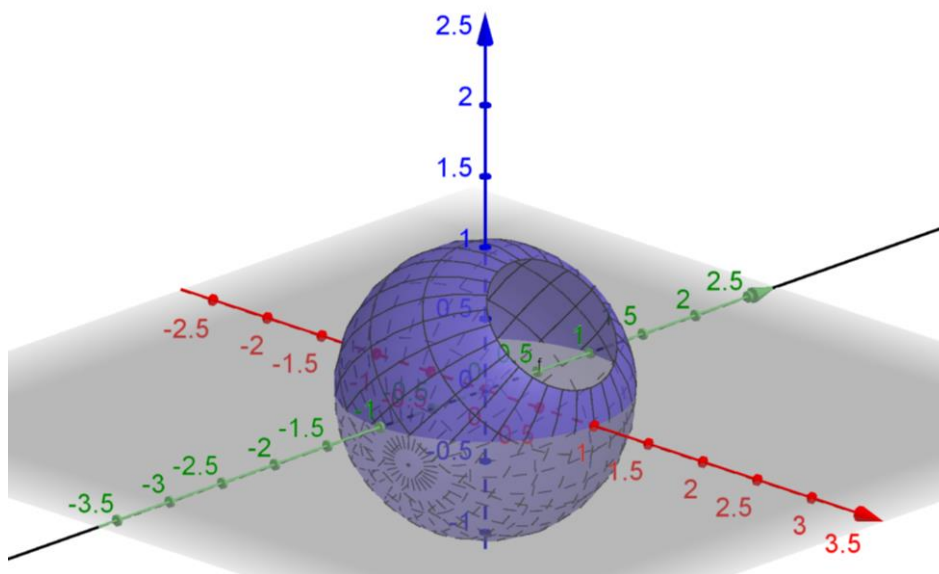
Sitten käännetään pallopintaa esim. 45 astetta y-akselin suhteen. Kirjoita ensin syöttökenttään:

```
f:Suora(<Piste>, <Suuntavektori> )
```

missä pisteen tilalle laita $(0, 0, 0)$ ja suuntavektorin tilalle $(0, 1, 0)$, suorahan on y-akseli. Sitten kirjoita:

```
b' = Kierto(b, 45°, f)
```

Tulisi näyttää tältä



Sitten ”suljetaan” pallopinta siten, että saadaan ”kuoppa”. Kirjoita syöttökenttään

```
c = Pinta(cos(u) cos(v), cos(u) sin(v), sqrt(3) + sin(u), u, (-pi) / 2,
(-pi) / 3, v, 0, 2pi)
```

Huomaat, että se on ns. pallon alaosa nostettuna pallon yläosantasalle. Sitten vielä kierto, eli:

```
c' = Kierto(c, 45°, f)
```

Lopuksi voit halutessasi korostaa kuopan reunan parametrisella käyrällä:



$d = \text{Käyrä}(\cos((- \pi) / 3) \cos(v), \cos((- \pi) / 3) \sin(v), \sqrt{3} + \sin((- \pi) / 3), v, 0, 2\pi)$

Sitten vielä kierto, eli:

$d' = \text{Kierto}(d, 45^\circ, f)$

Käyrän paksuutta kannattanee hieman lisätä. Väritä koko pallonpinta eli b' , c' jollakin tumman harmaan värillä ja d' esim. mustalla.

Sitten lopuksi ”laser”-säteet:

Piirrä pisteet A , A' , B , C ja B' :

$A = (0, 0, \sqrt{3} + \sin((- \pi) / 3))$

$A' = \text{Kierto}(A, 45^\circ, f)$

$B = (0, 0, 0)$

$C = \text{Piste}(d')$ (Tai valitse `Piste` objektilla ja lisää piste ”kuopan” reunaviivalle = parametriselle käyrälle d')

Pistettä B' varten tarvitaan suora h . Kirjoita h : $\text{Suora}(C, A')$

$B' = \text{Kierto}(B, 180^\circ, h)$

Pisteitä $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ja C_7 varten tarvitaan suora g . Kirjoita g : $\text{Suora}(B, A')$

$C_1 = \text{Kierto}(C, 45^\circ, g)$

$C_2 = \text{Kierto}(C, 90^\circ, g)$

$C_3 = \text{Kierto}(C, 135^\circ, g)$

$C_4 = \text{Kierto}(C, 180^\circ, g)$

$C_5 = \text{Kierto}(C, 225^\circ, g)$

$C_6 = \text{Kierto}(C, 275^\circ, g)$

$C_7 = \text{Kierto}(C, 315^\circ, g)$

Sitten muodostetaan laser-säteiden aloitusjanat:

$i = \text{Jana}(C, B')$

$j = \text{Jana}(C_1, B')$

$k = \text{Jana}(C_2, B')$

$l = \text{Jana}(C_3, B')$

$m = \text{Jana}(C_4, B')$

$n = \text{Jana}(C_5, B')$

$o = \text{Jana}(C_6, B')$

$p = \text{Jana}(C_7, B')$

$q = \text{Jana}(A', B')$

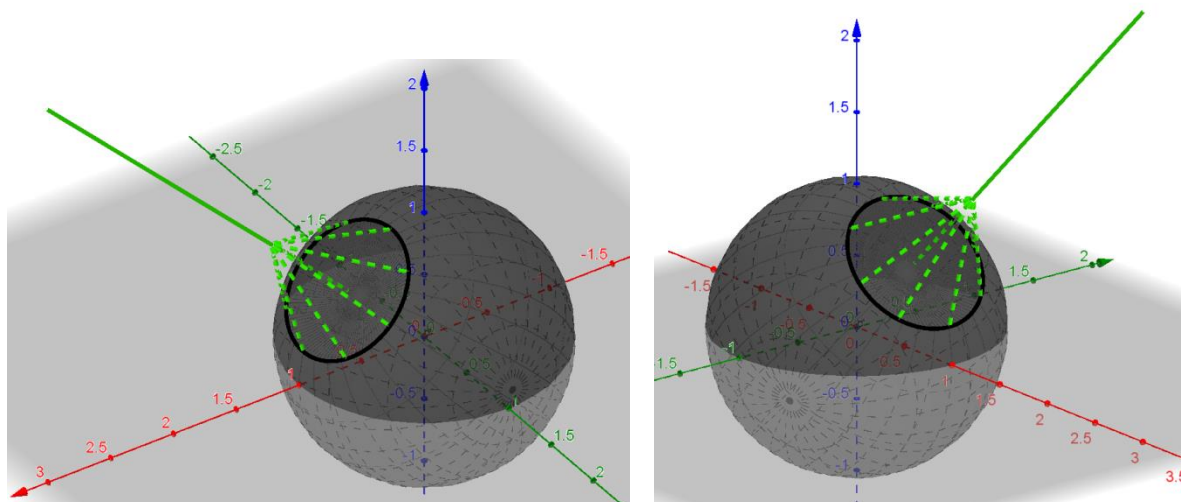
Väritä kaikki janat neon vihreällä, aseta ne katkoviivaksi ja lisää paksuutta arvoon 5 saakka.

Ja varsinaista lasersädettä varten tarvitaan piste suoralta g .

Valitse **Piste** objektilla ja lisää piste suoralle g kauemmaksi pallopinnasta kuin piste B'). Nimeä piste D :ksi ellei geogebra sitä automaattisesti nimeä.

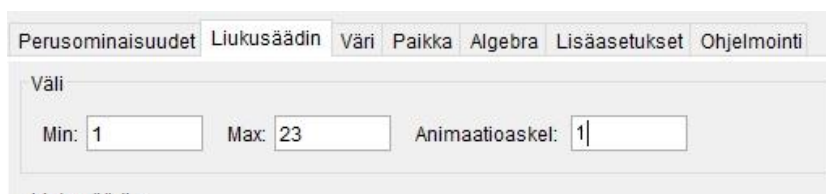
r : $\text{Puolisuora}(B', D)$

Väritä puolisuora neon vihreällä ja lisää paksuutta arvoon 5 saakka. Poista kaikki suorat ja piste-objektit näkyvistä. Tulisi siis näyttää tältä.

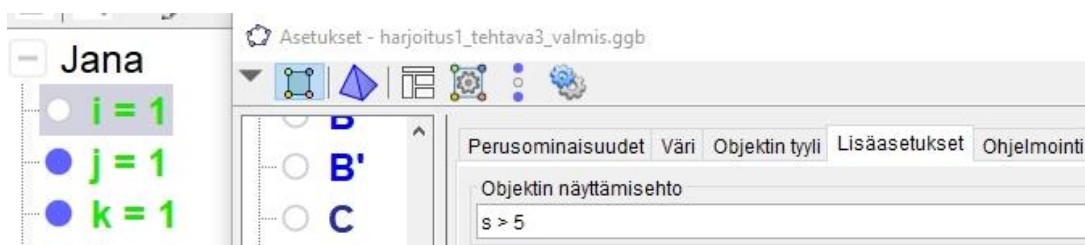


Lopuksi, poista akselit ja taso näkyvistä (piirtoalueella klikkaa hiiren kakkospainiketta).

Mikäli haluta vielä animaation, niin luo ensin liukusäädin s kirjoittamalla syöttökenttään s ja paina enter. Algebraikkunaan ilmestyy **Luku**-otsikon alle $s=1$. Aseta ominaisuuksista



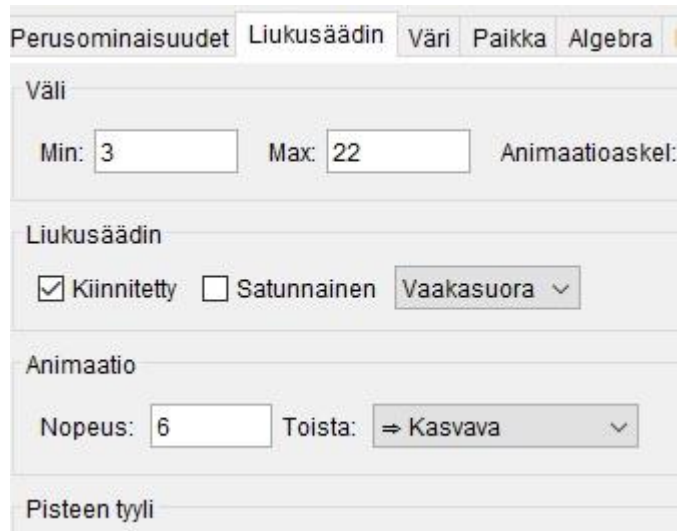
Tämän jälkeen aseta janoille järjestyksessä näyttämisehdot ominaisuuksista:



Eli janalle i ehto $s > 5$, janalle j ehto $s > 6$, ..., janalle p ehto $s > 12$ ja janalle q ehto $s > 13$.

Lopuksi puolisuoralle r ehto $s > 17$.

Viimeiseksi asiaksi laita liukusäätimen s nopeus arvoon 6 tai 7 ja toisto-ominaisuus arvoon Kasvava.



The screenshot shows a software interface with several tabs: "Perusominaisuudet", "Liukusäädin", "Väri", "Paikka", and "Algebra". The "Liukusäädin" tab is active. Under the "Väli" section, there are input fields for "Min:" (value 3) and "Max:" (value 22), followed by "Animaatioaskel:". The "Liukusäädin" section contains a checked checkbox for "Kiinnitetty", an unchecked checkbox for "Satunnainen", and a dropdown menu set to "Vaakasuora". The "Animaatio" section has a "Nopeus:" input field (value 6) and a "Toista:" dropdown menu set to "⇒ Kasvava". At the bottom, there is a label "Pisteen tyyli".

Paina algebraikkunasta s :n kohdalla hiiren kakkospainiketta ja laita animaatio päälle.

Tallenna *omanimi_sukunimi* -muodossa pedan tallennuskansioon 30.10.2019 mennessä.