Derivointia määritelmän kautta

Merkintöjä/notaatioita:
Derivaattaa merkitään monella eri tavalla

1) Määritelmämerkintöjä

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x},$$

Kaksi ylintä merkintätapaa analogisia, muutos: $\Delta x = h$

$$\lim_{a \to b} \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \qquad \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2) Historiallis-symbolismerkintöjä

1. f' ja $f'(x)$ Lagrange:n merkintätapa, Ranska 1736–1813
2. Df ja $Df(x)$ Cauchy:n merkintätapa, Ranska 1789–1857
3. $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$ ja $\frac{df(x)}{dx}$ Leibniz:n merkintätapa, Saksa 1646–1716

- Lagrange:n merkintätavassa $f'(x)$ korostuu se, että monesti myös *derivaatta on funktio*, jonka jatkuvuutta / derivoituvuutta voi edelleen tutkia.
- Cauchy:n merkintätapa $Df(x)$ korostaa *operointia*, eli mitä toimintoa ollaan tekemässä (iso D) ja operoinnin kohdetta ($f(x)$). Siis operointi D kohdistetaan funktion f arvon $f(x)$ määrittelevään lausekkeeseen. Tämä merkintätapa on käyttökelpoinen vektoriarvoisille funktioille… lineaarikuvaukset… matriisit.
- Mitä uutta / lisää Leibniz:n merkintätapa sitten antaa? Se kertoo *derivaatan määritelmän* lyhyesti, sillä erotusosamäärän raja-arvo voidaan ymmärtää differentiaalisilla suureilla (ns. infinitesimaalisilla suureilla) ilmoitettuna

$$\frac{df}{dx} \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Näillä kaikilla merkinnöillä on paikkansa → opettele sujuva käyttö!

Ruvetaas derivoimaan!
Derivaatan määritys tietyssä kohdassa $x = x_0$ oli ja on edelleen hidasta, entä yleisesti? Siis saadaanko kerralla kaikissa kohdissa derivaatta määritettyä? Saadaan.

→ Hyödynnetään määritelmää $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Aiemmin oli maininta että sama muutos h pitää löytyä sekä osoittajasta että nimittäjästä, siis

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Pitää olla sama muutos, tässä määritelmä"versiossa".

→ Toisaalta tavoitteena on saada h pois nimittäjästä, jottei tule tilannetta $\frac{\text{jotain}}{0}$.

Tarkastellaan seuraavia esimerkkejä.

Esimerkki **a)** Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa x. Esitä f':n avulla $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$. Huom. nyt ei ole sama muutos!

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \cdot 2 = f'(x) \cdot 2 = 2f'(x)$$

b) Kuten **a)**-kohdassa, nyt $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x-3h)}{5h}$ (haastava! ☺).

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x-3h)}{5h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)\overbrace{-f(x)+f(x)}^{=0}-f(x-3h)}{5h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{5h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-3h)}{5h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \cdot \frac{2}{5} + \lim_{h \to 0} \frac{-\big(f(x-3h)-f(x)\big)}{5h}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{2}{5} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot f'(x) + \frac{3}{5} \cdot f'(x) = f'(x)$$

Esimerkki Derivoi funktio f: $f(x) = x^2 - 1$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - 1] - [x^2 - 1]}{h}$$

Tavoitteena on saada h pois nimittäjästä!

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 - 1] - x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Ja nyt voidaan missä tahansa kohdassa x laskea derivaatan arvo. Esimerkiksi kohdassa $x = 4{,}5$ derivaatan arvo on 9.

Derivoituvuus ja jatkuvuus

Jos erotusosamäärällä on vain vasemmanpuoleinen (vastaavasti oikeanpuoleinen) raja-arvo, niin funktio f on kohdassa x_0 *vasemmalta (oikealta) derivoituva*.
Tämä raja-arvo on funktion f vasemmanpuoleinen (oikeanpuoleinen) derivaatta kohdassa x_0, merkitään

$$f'(x_0 -), \qquad f'(x_0 +),$$

TAI

$$f_-'(x_0), \qquad f_+{}'(x_0).$$

Määritelmä, derivaatta & derivaattafunktio & derivoiminen:
Funktion $y = f(x)$ derivaattafunktion f' arvo $f'(x)$ on funktion f *derivaatta* kohdassa x. *Derivoiminen* tarkoittaa derivaattafunktion muodostamista. Derivaattafunktio on määritelty kaikissa niissä kohdissa x, joissa f on derivoituva. Puhekielessä derivaatta ⟷ derivaattafunktio!

Lause, derivoituvuus & jatkuvuus:
Derivoituvuudesta seuraa jatkuvuus, mutta jatkuvuudesta ei seuraa derivoituvuutta, siis

$$f \text{ derivoituva } \Longrightarrow f \text{ jatkuva}$$

$$f \text{ jatkuva } \not\Rightarrow f \text{ derivoituva}$$

Todistus Katso moniste. Huomaa, että jälkimmäisen väitteen osoittamiseksi riittää antaa sellainen esimerkki, jossa homma ei toimi. Eli sellainen funktio, joka on jatkuva mutta ei ole derivoituva kaikkialla.

Huomautus Sanotaan, että jatkuvuus on derivoituvuudelle *välttämätön*, muttei *riittävä* ehto. Toisaalta derivoituvuus on *riittävä* muttei *välttämätön* ehto jatkuvuudelle.
(Välttämättömyys vs. riittävyys → kurssi 11.)

Derivoituvuus on siis vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus!

Korkeamman kertaluvun derivaatat ja osittaisderivaatat
Funktion f derivaatta f' (mikäli olemassa) on siis itsekin funktio.
→ Se voidaan edelleen derivoida (mikäli se on derivoituva). Saadaan funktion f *toisen kertaluvun derivaatta*, merkitään

$$f'', \qquad D^2 f, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} \ .$$

Ja yleisesti funktion f n:nnen kertaluvun derivaattaa merkitään

$$f^{(n)}, \qquad D^{(n)} f, \qquad \frac{d^n f}{dx^n} \ .$$

Olkoon funktio f määritelty useamman muuttujan kautta, siis esimerkiksi $f\colon\ f(x,y) = 2x - y^3 + 2$. Tällöin voidaan derivoida joko muuttujan x tai muuttujan y suhteen, puhutaan osittaisderivaatoista. Merkitään d merkinnän sijaan $\frac{\partial f}{\partial x}$ lausutaan [doo f doo x], siis

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 0 + 0 = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 3y^2 + 0 = -3y^2 \ .$$

Mistä nää tulee?...En kysy kokeessa…tää on todellista ”nice to know” – tietoa ☺.