Funktion derivaatta

Raja-arvo ja jatkuvuus ovat analyysin perusteita. Nyt siirrytään tarkastelemaan *muutosta*, joka pitää sisällään

1) keskimääräisen muutosnopeuden → erotusosamäärä $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, missä Δx (vastaavasti $\Delta f(x)$) tarkoittaa muutosta saatuna konkreettisten arvojen erotuksesta, siis esim. $\Delta x = 5 - 3 = 2$.

2) hetkellisen muutosnopeuden → derivaatta = erotusosamäärän raja-arvo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: \frac{df}{dx}$, missä dx (vastaavasti df) tarkoittaa ∞ pientä muutosta, ns. infinitesimaalinen suure.

Määritelmä, erotusosamäärä:
Olkoon funktio f määritelty kohdan x ympäristössä. Tällöin ympäristöstä löytyy kohta $x + \Delta x$ siten, että $f(x + \Delta x)$ on hyvin määritelty.
Osamäärää

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\text{jokin luku}}{\text{jokin luku}} = \text{jokin luku}$$

sanotaan funktion *erotusosamääräksi*.

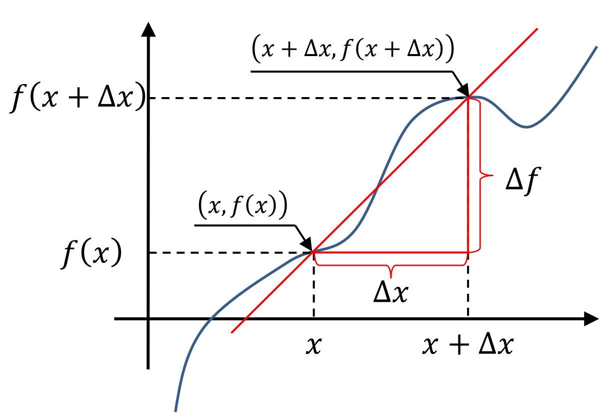
Havaitaan, että sitä vastaa geometrisesti käyrän $y = f(x)$ pisteiden

$$\big(x, f(x)\big)$$

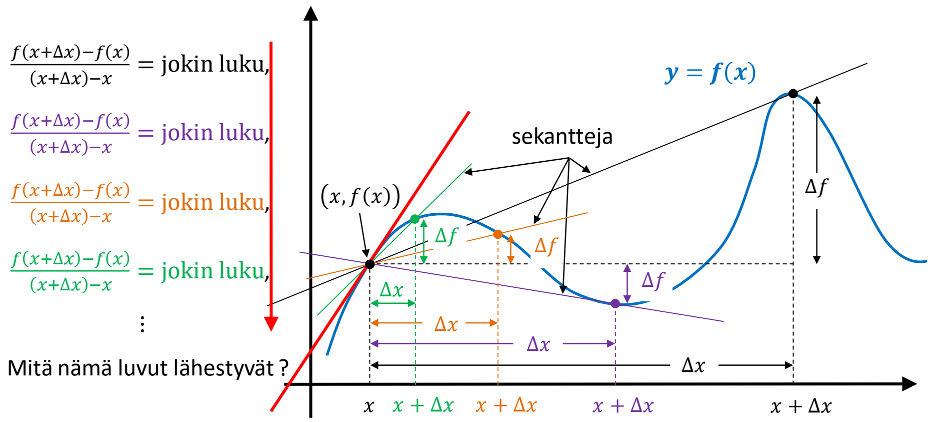
ja

$$\big(x + \Delta x, f(x + \Delta x)\big)$$

kautta kulkevan *sekantin kulmakerrointa*.



Mitä tapahtuu erotusosamäärälle (”jokin luku”:lle), kun annetaan muutoksen $\Delta x \to 0$ eli lähestyä nollaa?



Tämä on rajankäyntiä ja tuloksena on

Määritelmä, derivaatta eli erotusosamäärän raja-arvo:
Jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

on olemassa, niin sitä sanotaan funktion $y = f(x)$ *derivaataksi* kohdassa x ja merkitään

$$f'(x), \qquad Df(x), \qquad \frac{df}{dx}.$$

Tällöin funktio f on derivoituva kohdassa x.

Geometrinen tulkinta on käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetetun tangentin kulmakertoimen lukuarvo (posit. tai negat.)

Huomautus **1)** Sekantin kk. antaa siis keskimääräisen muutosnopeuden tarkasteltavalla välillä $I = [x, x + \Delta x]$. Tangentin kk. antaa hetkellisen muutosnopeuden kohdassa x.

2) Laaja kirjo eri merkintätapoja/merkintöjä, (em. lisäksi):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x},$$

Pitää olla sama muu-tos, tässä ”versiossa”. Tähän palataan!

$$\lim_{a\to b}\frac{f(a)-f(b)}{a-b},\qquad \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Nämä kaikki tarkoittavat samaa asiaa, eli mitä?

Siis ***erotus – osamäärän - raja-arvo*** kolme kohtaa (käydään ne läpi).

1) Ensin tehdään vähennyslaskut:

$$\begin{cases} f(x)-f(x_0)=\text{jokin luku }(\Delta f=\text{pystyakseliarvojen erotus})\\ \quad x-x_0 \quad =\text{jokin luku }(\Delta x=\text{vaaka}-\text{akseliarvojen erotus})\end{cases}$$

2) Sitten näistä luvuista tehdään jakolaskut

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\text{jokin luku}}{\text{jokin luku}}=\text{jokin luku}$$

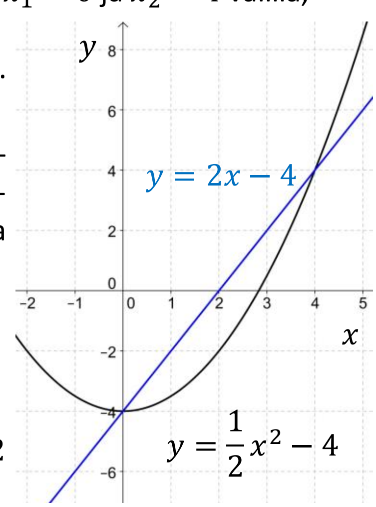
3) Kohtia **1)** ja **2)** suoritetaan yhä uudelleen ja uudelleen, mutta aina otetaan sellainen x, joka on lähempänä kohtaa kuin edellinen x. Tämä on rajankäyntiä!

Esimerkki Määritä funktion f: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4$

a) keskimääräinen muutosnopeus kohtien $x_1=0$ ja $x_2=4$ välillä,

b) hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x=2$, eli derivaatan arvo kohdassa $x=2$.

a) Piirretään funktion graafi.
Keskimääräinen muutos saadaan ”y”-arvojen erotus jaettuna ”x”-arvojen erotuksella eli pisteiden $(0,-4)$ ja $(4,4)$ kautta kulkevan suoran kulmakertoimesta.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2-4\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0^2-4\right)}{4-0}=\frac{8}{4}=2$$

b) 3 vaihetta ***erotus – osamäärän - raja-arvo:*** kohta $x = 2$

Kun $\Delta x = 1$:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot(2+1)^2-4\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\right)}{(2+1)-2}=\frac{0{,}5+2}{1}=2{,}5$$

Kun $\Delta x = 0{,}5$:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot(2+0{,}5)^2-4\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\right)}{(2+0{,}5)-2}=\frac{-\frac{7}{8}+2}{0{,}5}=2{,}25$$

Kun $\Delta x = 0{,}1$:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot(2+0{,}1)^2-4\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\right)}{(2+0{,}1)-2}=\frac{-1{,}795+2}{0{,}1}=2{,}05$$

Kun $\Delta x = 0{,}01$:

$$\ldots=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot(2+0{,}01)^2-4\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\right)}{(2+0{,}01)-2}=\frac{-1{,}97995+2}{0{,}01}=2{,}005$$

Ja vielä kun $\Delta x = 0{,}001$:

$$\ldots=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot(2+0{,}001)^2-4\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\right)}{(2+0{,}001)-2}=\ \ldots\ =2{,}0005$$

Näyttäisi siltä, että erotusosamäärien lukuarvot lähenevät 2:sta kun muutos $\Delta x \to 0$.
Näin havaitaan, että on. Sillä piirtämällä tangentti käyrälle

$$y=\frac{1}{2}x^2-4$$

kohtaan $x = 2$ havaitaan tangentin kulmakertoimen olevan tuo 2.