# Funktion raja-arvo

| **Matematiikka** | **tarve** | Yhtä vanhoja kuin ihmiskuntakin |
|---|---|---|
| **algebra** | lukumäärien tutkiminen | ~6 000 eKr. |
| **geometria** | kuvioiden ja kappaleiden tutkiminen | Antiikin Kreikka |
| **analyysi** | *muutosten* tutkiminen | ~1 600 Newton ja Leibniz |

**Analyysi** perustuu raja-arvon käsitteeseen. Mitä rajaton lähestyminen tarkoittaa?

**Esimerkki** Luvun $\pi$ rationaaliset likiarvot:

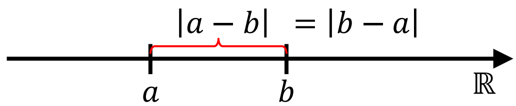
$$\pi_1 \approx 3{,}1\,, \qquad \pi_2 \approx 3{,}14\,, \qquad \pi_3 \approx 3{,}141\,59$$

*lähestyvät rajattomasti* lukua $\pi$, kun oikeiden desimaalien lukumäärä *kasvaa rajatta*.

$\Rightarrow$ Nämä ovat hieman epätäsmällisiä ilmauksia, tarkennetaan.

**Määritelmä, poikkeama:**

Reaalilukujen $a$ ja $b$ välinen *poikkeama* on itseisarvo $|a-b|$.

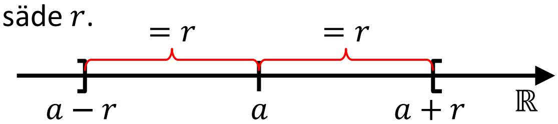



**Huomautus** $|a-b| = |b-a|$ eli itseisarvo vastaa vastinkohtien $a$ ja $b$ etäisyyttä lukusuoralla.

**Määritelmä, ympäristö:**

Reaaliluvun $a$ ympäristö, tarkemmin $r$-ympäristö, on sellainen avoin väli, jonka keskipiste on $a$ ja säde $r$.

Toisin sanoen, $a$:n ympäristö on väli $]a-r, a+r[$.




**Esimerkki** Luvun 3 0,01-säteinen ympäristö on $]\,3-0{,}01; 3+0{,}01\,[$ eli $]2{,}99\,;\,3{,}01[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 0{,}01\}$.

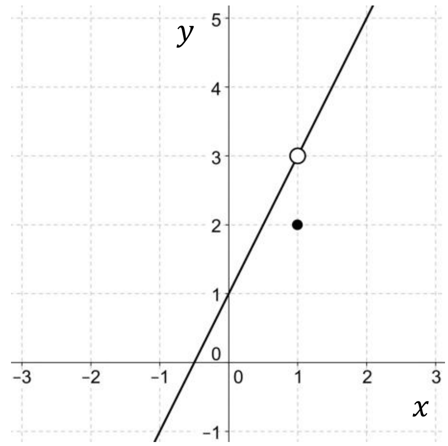
Muistakaa käyttää erottimena puolipistettä jos välin päätepisteinä on desimaalilukuja.

**Esimerkki** Tarkastellaan funktiota

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x \neq 1 \\ 2, & \text{kun } x = 1 \end{cases}.$$

Laskemalla ja taulukoimalla funktion arvoja havaitaan, että funktion

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0,9 | 2,8 | 1,1 | 3,2 |
| 0,99 | 2,98 | 1,01 | 3,02 |
| 0,999 | 2,998 | 1,001 | 3,002 |




$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x \neq 1 \\ 2, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$$

raja-arvo kohdassa $x = 1$ näyttäisi olevan 3. Tätä merkitään

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Ja luetaan: ”limes $x$ lähestyy 1:stä $f(x)$ on 3.” TAI ”limes $f(x)$ on 3, kun $x$ lähestyy 1:stä.” limes=raja (lat)

Vaihtoehtoinen ja usein käytetty tapa on kirjoittaa

$$f(x) \to 3, \qquad \text{kun } x \to 1$$

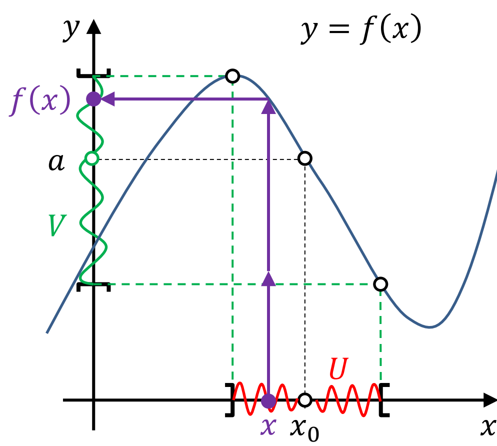
ja luetaan :” $f(x)$ lähestyy 3:sta, kun $x$ lähestyy 1:stä”.

Huomaa vielä, että funktion raja-arvo $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ on eri asia kuin funktion arvo muuttujan arvolla 1, eli $f(1) = 2$.

$$\underbrace{\lim_{x \to 1} f(x) = 3}_{\substack{f\text{:n raja−arvo} \\ \text{kohdassa } x=1}} \qquad \underbrace{f(1) = 2}_{\substack{f\text{:n arvo} \\ \text{kohdassa } x=1}}$$

**Määritelmä, funktion raja-arvo:**
Olkoon $f$ määritelty kohdan $x = x_0$ eräässä ympäristössä tätä kohtaa $x_0$ mahdollisesti lukuunottamatta. Funktiolla $f$ on kohdassa $x_0$ raja-arvo $a$, jos funktion $f$ arvot saadaan mielivaltaisen lähelle lukua $a$ aina, kun muuttujan $x \neq x_0$ arvot valitaan riittävän läheltä lukua $x_0$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{TAI} \quad f(x) \to a, \qquad \text{kun } x \to x_0 \,.$$




Funktiolla $f$,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$.

**Täsmällisesti:** Kun on annettu luvun $a$ mielivaltainen ympäristö $V$, niin löytyy luvun $x_0$ ympäristö $U$ siten, että

$$\forall x \in U \backslash \{x_0\} \implies f(x) \in V \, .$$

**Huomautus** Funktio $f$ voi olla määritelty tai sitten ei kohdassa $x_0$. Tällä ei ole merkitystä → raja-arvo voidaan lähes aina määrittää!

Toispuoleiset raja-arvot määritellään lähestymissuunnan mukaan:

$\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ on vasemmanpuoleinen raja-arvo ja

$\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ on oikeanpuoleinen raja-arvo.

Pätee tärkeä tulos.

Funktiolla $f$ on kohdassa raja-arvo $a$ vain jos toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja ne ovat samoja, siis

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = a = \lim_{x \to x_0} f(x) \, .$$

**Esimerkki** Olkoon $f: f(x) = 2x + 1$. Kuinka lähellä lukua 1 pitää muuttujan $x$ ($\neq 1$) olla, jotta $|f(x) - 3| < 0{,}01$?

Ratkaisu Kun $x \neq 1$, niin

$$|f(x) - 3| < 0{,}01 \iff |\overbrace{(2x+1)}^{= f(x)} - 3| < 0{,}01$$

$$|(2x+1)-3| < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-2| < 0{,}01 \qquad |:2$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-1| < 0{,}005$$

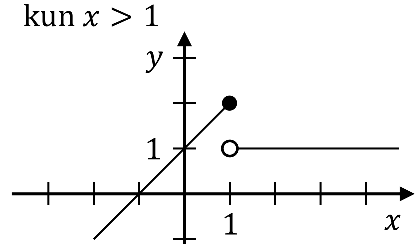
Eli, muuttujan $x$ pitää poiketa vähemmän kuin 0,005 luvusta 1 (itseis-arvo → etäisyys!)

$$\Longrightarrow \quad x \in \,]0{,}995\,;1{,}005[\setminus\{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-1| < 0{,}005\}\,.$$

**Esimerkki** Paloittain määritelty funktio. Määritä $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x \le 1 \\ \phantom{x+{}}1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Nyt




$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x+1) = 2,$$

mutta

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 1 = 1.$$

Siis eri → raja-arvoa ei ole, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1+} f(x)$! Huom $f(1) = 2$

DERIVAATTA, MAA6

# Raja-arvon muodostamissääntöjä

Raja-arvoja määritettäessä/laskettaessa hyödynnetään seuraavia tulok-sia (katso kirja).

Olkoon $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ ja $c \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin pätee

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \qquad b \neq 0$$

Lisäksi pätee

$$\lim_{x\to x_0} c = c, \qquad \lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c \cdot a$$

Näillä pärjätään kohtuu pitkälle. Esimerkiksi **kaikkien alkeisfunktioiden** (eli minkä?... alkeisfunktioita ovat: polynomi- ja murto-, potenssi-, juuri-, eksponentti-, logaritmi- ja trigonometriset funktiot) **raja-arvot saadaan suoraan sijoittamalla rajakohta $x = x_0$ funktion määrittelevään lausekkeeseen, kunhan funktio on määritelty jossakin kohdan $x_0$ ympäristössä**.

**Esimerkki**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}(3x^3 - 5x + 7) &= \lim_{x\to -2} 3x^3 - \lim_{x\to -2} 5x + \lim_{x\to -2} 7 \\ &= 3\lim_{x\to -2} x^3 - 5\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 7 \\ &= 3(-2)^3 - 5(-2) + 7 \\ &= -24 + 10 + 7 = -7\end{aligned}$$

**TAI**

$$3x^3 - 5x + 7 \to 3(-2)^3 - 5(-2) + 7 = -7, \qquad \text{kun } x \to -2\,.$$

Ongelmia tulee, kun suora sijoitus johtaa tilanteeseen $\frac{0}{0}$ (rationaalifunktiot). Tällöin pitää supistaa/laventaa tai joskus ”huijata” eli lisätään nolla esimerkiksi muodossa

$$(2x - a) - (2x - a)$$

tai kerrotaan ykkösellä esimerkiksi muodossa

$$\frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} + 4\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 1} + 4\right)}\,.$$

**Esimerkki** **a)** $\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-2x}$ , määrittelyehto $x \neq 2, 0$. Suora sijoitus antaa $\frac{0}{0}$, mutta

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1\,.$$

**b)** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, määrittelyehto $x \neq 1$.
Suora sijoitus antaa $\frac{0}{0}$, mutta koska $x = (\sqrt{x})^2$, niin

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \to \frac{1}{2}, \qquad \text{kun } x \to 1\,.$$

**c)** $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$, määrittelyehto $x \neq 0$. Suora sijoitus antaa $\frac{0}{0}$, toisaalta supistaminen

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

ei paranna tilannetta. Toisin sanoen raja-arvoa ei ole. Kun $x \to 0+$, niin $\frac{1}{x} \to \infty$ ja vastaavasti kun $x \to 0-$, niin $\frac{1}{x} \to -\infty$. Edelleen

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{x}{x^2} = -\infty\ .$$

Näihin palataan…nyt lasketaan ☺.