Rationaalilauseke ja -funktio

Määritelmä, rationaalilauseke ja –funktio:
Kahden polynomin $p(x)$ ja $q(x)$ osamäärä $\frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0$ on *rationaalilauseke*, jonka osoittaja on $p(x)$ ja nimittäjä $q(x)$. Huomaa, että pelkkä polynomi on myös rationaalilauseke, jonka nimittäjä on 1, siis $\frac{p(x)}{1}$. Aitoa rationaalilauseketta $q(x) \neq 1$ $(\neq 0)$ sanotaan myös *murtolausekkeeksi*.

Rationaalilausekkeen määrittelemää funktiota

$$f: f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

sanotaan rationaalifunktioksi, muuttujia voi olla useampi kuin yksi (x).

Esimerkki

$$f: f(x) = \frac{5x^{12} + x - 9}{2x - 3}$$

Rationaalifunktio on määritelty aina, kun nimittäjä $\neq 0$. Rationaalifunktion nollakohdat ovat ne osoittajan nollakohdat, joissa nimittäjä ei ole nolla, siis

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = 0 \text{ ja } q(x) \neq 0\,.$$

Huomautus **1)** Rationaalilukuja voidaan pitää rationaalilausekkeiden erikoistapauksina, sillä onhan pelkkä luku kelpo lauseke (muista määr.).
2) Nyt pitää keskittyä määrittelyjoukkojen etsimiseen ennen tehtävän ratkaisemista → ne merkitään lyhyesti johonkin sivuun (lähelle).

Esimerkki Rationaalifunktio f: $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ on määritelty, kun $x \neq 3$ (lyhyesti $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{3\}$). Nollakohta $x = 0$, eli milloin $2x = 0$.

Rationaalifunktio $g: g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ on määritelty $\forall x \in \mathbb{R}$ miksi? Nollakohdat $x = \pm 1$.

Sievennä

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Lavennetaan x^2:lla, saadaan

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}, x \neq 1{,}0.$$

Huomaa erityisesti , että funktiot

$$f: f(x) = \frac{3x}{x^2-2x} = \frac{3x}{x(x-2)}, \qquad g: g(x) = \frac{3}{x-2}$$

eivät ole samoja! Niillä on eri määrittelyjoukot!

Huomautus Kuten lausekkeiden kohdalla, jos $q(x) \neq 1$, niin rationaalifunktiota sanotaan myös murtofunktioksi.

Supistaminen:
Rationaalilausekkeita supistetaan (normaalisti) jakamalla osoittaja ja nimittäjä tekijöihin sekä poistamalla yhteiset tekijät. Syy: rationaalilausekkeen arvo ei muutu. Muista kuitenkin määrittelyehto (-ehdot), joka (jotka) katsotaan alkuperäisestä lausekkeesta! **Nollalla ei saa edelleenkään jakaa!** Huomaa, että nyt nolla voi olla esim. muodossa $x - x$.

Esimerkki

$$\frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \frac{3(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{3}{x+2}, \qquad x \neq -2$$

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}, \qquad x \neq \pm 1, \text{miksi myös} + 1?$$

$$\frac{x-5}{5-x} = \frac{x-5}{-1(x-5)} = \frac{1}{-1} = -1, \qquad x \neq 5$$

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-1(a-b)} = -1, \qquad a \neq b$$

Muista: Supistettaessa sekä osoittajan että nimittäjän täytyy olla tulomuodossa. Summan termejä ei saa supistaa.

Laventaminen:
Kuten rationaaliluvuilla (murtoluvuilla).
Laventaminen samannimisiksi → Ensin nimittäjät jaetaan tekijöihin, minkä jälkeen lausekkeet lavennetaan puuttuvilla ”tekijöillä”. (Saadaan ns. pienin yhteinen monikerta p.y.m.)

Esimerkki

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}, \qquad x\neq -1{,}0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-4}&=\frac{1}{x(x-2)}-\frac{x}{(x-2)(x+2)}\\&=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot x}{x(x-2)(x+2)}\\&=\frac{-x^2+x+2}{x(x-2)(x+2)}, \qquad x\neq 0{,}2{,}-2\end{aligned}$$

Kerto- ja jakolasku: Kertolaskussa osoittajat keskenään, ja nimittäjät keskenään. Jakolasku muutetaan kertolaskuksi.

Esimerkki

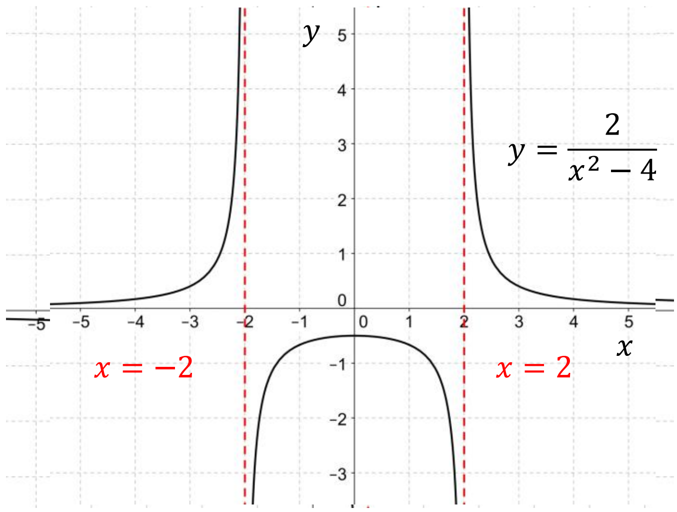
$$\frac{2a}{a-1}\cdot\frac{3}{a+1}=\frac{6a}{a^2-1}, \qquad a\neq \pm 1$$

$$\begin{aligned}\frac{a^2-16}{2a+6}\cdot\frac{2a}{a^2-4a}&=\frac{(a^2-16)\cdot 2a}{(2a+6)(a^2-4a)}=\frac{(a+4)(a-4)\cdot 2a}{2(a+3)a(a-4)}\\&=\frac{a+4}{a+3}, \qquad a\neq -3{,}0{,}4\end{aligned}$$

$$\frac{3}{a-1}:\frac{2}{a+1}=\frac{\frac{3}{a-1}}{\frac{2}{a+1}}=\frac{3(a+1)}{2(a-1)}, \qquad a\neq \pm 1$$

Määritelmä, asymptootti:
Suoraa tai käyrää, jota (rationaali)funktion kuvaaja eli graafi rajatta lähestyy sanotaan *asymptootiksi*, merkitään katkoviivalla.

Esimerkki Rationaalifunktion määrittelevän lausekkeen nimittäjän nollakohdat $x = x_0$ ovat asymptootteja. (Näihin palataan.)



DERIVAATTA, MAA7

Rationaaliyhtälö

Määritelmä, rationaalilauseke ja –yhtälö:
Lauseketta, joka on kahden polynomin osamäärä $\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ tai joka voidaan muuntaa sellaiseksi, sanotaan *rationaalilausekkeeksi*.
Yhtälö, jossa kaikki muuttujan (yleensä x) lausekkeet ovat rationaalilausekkeita on rationaaliyhtälö.

Muista, että myös polynomit ja pelkät luvutkin ovat rationaalilausekkeita, tällöin siis $q(x) = 1$. Tämän vuoksi rajoitutaan jatkossa tarkastelemaan murtolausekkeita ja murtoyhtälöitä (eli $q(x) \neq 1$).

Rationaaliyhtälöitä ratkaistaessa on varmistuttava siitä, ettei mikään nimittäjä tule nollaksi eli että yhtälön määrittelyehto (-ehdot) pysyvät voimassa!

Esimerkki Ratkaise yhtälö

$$\frac{6}{x-1} - x = 4\,.$$

Nyt määrittelyehto on $x \neq 1$, jolloin

$$\frac{6}{x-1} - x = 4 \qquad |\cdot(x-1)$$

$$6 - x(x-1) = 4(x-1)$$

$$6 - x^2 + x = 4x - 4$$

$$-x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm 7}{-2} \quad \Rightarrow \quad x = -5 \ \lor \ x = 2$$

Vastaukset toteuttavat määrittelyehdon, eli $-5 \neq 1$ ja $2 \neq 1$.

Rationaaliepäyhtälö

Määritelmä, rationaaliepäyhtälö:
Rationaaliepäyhtälöksi sanotaan muotoa

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0, \qquad q(x) \neq 0,1$$

olevia epäyhtälöitä (tai, jotka voidaan saattaa ko. muotoon).
Merkin $>$ tilalla voi olla $<, \leq, \geq$ tai $\neq$.

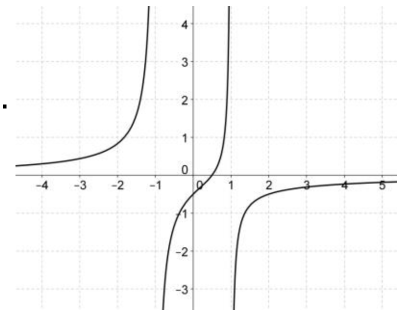
Polynomifunktion merkki voi vaihtua **vain** funktion nollakohdissa (koska polynomit ovat jatkuvia kaikkialla…jatkuvuus…selviää kyllä). Vastaava ei päde rationaalifunktioilla, nimittäin merkki voi vaihtua myös nimittäjän $q(x)$ nollakohdissa.

Rationaaliepäyhtälöitä ratkaistaessa **ei** (yleensä) voida kertoa eikä jakaa tuntemattoman x sisältävällä lausekkeella. Syy: ei yleensä tiedetä lausekkeen merkkiä eikä siten sitä säilyykö epäyhtälön suunta.

Kuinka sitten rationaaliepäyhtälö ratkaistaan?

Esimerkki Ratkaise epäyhtälö

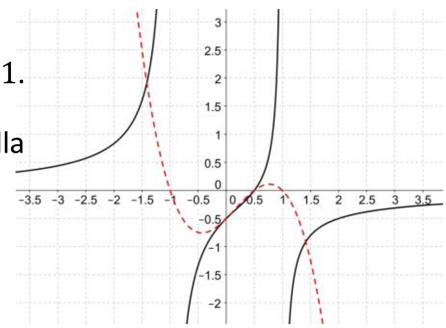
$$\frac{\frac{1}{2}-x}{x^2-1} > 0\,.$$



Lauseke vastaa funktiota f: $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-x}{x^2-1}$, jonka kuvaaja on oikealla.

Jos kertoo lausekkeen (x^2-1):lla tulee

$$(1/2-x)(x^2-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} - x^3 + x > 0$$



Eli $\frac{\frac{1}{2}-x}{x^2-1} > 0$, kun $x < -1$ tai $\frac{1}{2} < x < 1$.

Kuvassa oikealla punaisella katkoviivalla

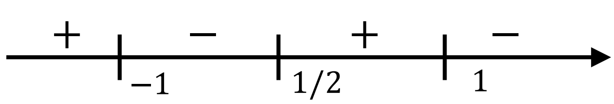
$$y = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\,,$$

josta rajat $x < -1$ tai $\frac{1}{2} < x < 1$.

Näin ei kuitenkaan ole suositeltavaa poistaa nimittäjää (edellisessä esimerkissä se kuitenkin toimi). Koska esim. epäyhtälöstä $\frac{1}{x} < 1$ seuraisi $1 < x$, mutta toisaalta jos x on negatiivinen niin ey. $\frac{1}{x} < 1$ on aina tosi.

Yleisesti rationaalifunktio voi vaihtaa merkkiä vain siirryttäessä joko osoittajan tai nimittäjän nollakohdan yli. Nollakohdiksi saadaan

Osoittajan nollakohta: $\frac{1}{2} - x = 0 \implies x = \frac{1}{2}$.
Nimittäjän nollakohdat: $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$



Näiden kohtien välillä merkki säilyy ja lausekkeen (eli funktion f) merkki selvitetään laskemalla kultakin väliltä ns. testiarvo.

$$f(-2) = \frac{\frac{1}{2}-(-2)}{(-2)^2-1} = \frac{2\frac{1}{2}}{3} > 0, \qquad \text{positiivinen}$$

$$f(0) = \frac{\frac{1}{2}-0}{0^2-1} = -\frac{1}{2} < 0, \qquad \text{negatiivinen}$$

$$f(3/4) = \frac{\frac{1}{2} - (3/4)}{(3/4)^2 - 1} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{7}{16}} = \frac{4}{7} > 0, \qquad \text{positiivinen}$$

$$f(2) = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2^2 - 1} = -\frac{\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2} < 0, \qquad \text{negatiivinen}$$

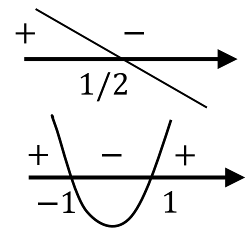
Tämä tieto merkitään

		-1		$1/2$		1	
f	$+$		$-$		$+$		$-$

TAI

Paljon tehokkaampi väline on ns. merkkikaavio (suositeltava tapa!)

		-1		$1/2$		1	
$\frac{1}{2} - x$	$+$		$+$		$-$		$-$
$x^2 - 1$	$+$		$-$		$-$		$+$
f, osam.	$+$		$-$		$+$		$-$



Vastaus: $\frac{\frac{1}{2}-x}{x^2-1} > 0$ kun $x < -1$ tai $\frac{1}{2} < x < 1$. Määr.ehto täyttyy!

Rationaaliepäyhtälön ratkaisuvaiheet

1. Muunnetaan epäyhtälö perusmuotoon $\frac{p(x)}{q(x)} > 0,\ q(x) \neq 0$ ellei se jo ole sitä ($<, \leq$ tai $\geq, \neq$). Merkitään määrittelyehdot **näkyviin!**

2. Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin ja määritetään osoittajan ja nimittäjän nollakohdat yhtälöistä
$$p(x) = 0, \qquad q(x) = 0\ .$$
Merkitään ne lukusuoralle, eli jaetaan x-akseli nollakohtien avulla osiin.

3. Tehdään merkkikaavio.

4. Päätellään vastaus merkkikaavion perusteella; avoin ympyrä = nollakohta ei kuulu mukaan (tapaukset $<, >$ ja $\neq$) tummennettu ympyrä = nollakohta kuuluu mukaan (tapaukset $\leq, \geq$).

5. Tarkistetaan vastausten sopivuus määrittelyehtoon (-ihin).