Ääriarvosovelluksia

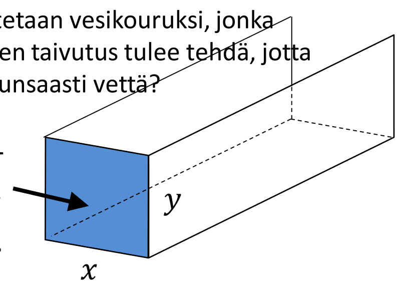
Mekaaninen derivointi osataan (tai ainakin osataan käyttää laskinta). Mutta miten muodostetaan tutkittavaan ongelmaan / tehtävään liitty-vä funktio eli x:stä riippuva lauseke on isoin haaste!

Muutama havainto matemaattisesta mallintamisesta:

- Sano = puhu ääneen mitä pitää ratkaista/etsiä/määrittää… ja kirjoi-ta se vihkoon.
- Pyri muodostamaan annetuista tiedoista funktio (eli lauseke), joka riippuu vain yhdestä muuttujasta. Eli ilmoita toinen/muut muuttujat valitun muuttujan avulla.
  Esim.
  $$V = \text{pituus} \cdot \text{korkeus} \cdot \text{leveys} \qquad \text{3 muuttujaa}$$
  Tiedetään, että leveys = 2 ·pituus ja korkeus = 3 ·pituus, joten
  $$V = \text{pituus} \cdot 3 \cdot \text{pituus} \cdot 2 \cdot \text{pituus} \qquad \text{1 muuttuja}$$
  $$V = V(\text{pituus}) = 6 \cdot (\text{pituus})^3$$

Matemaattista mallintamista oppii ajan kanssa. Aluksi se tuntuu hie-man haastavalta.

Esimerkki Peltilevy, leveydeltään 20 cm taivutetaan vesikouruksi, jonka poikkileikkaus on suorakulmio. Miten taivutus tulee tehdä, jotta kouru kuljettaisi mahdollisimman runsaasti vettä?



Kuva!
Pitää etsiä tilanne, jossa kourun läpileik-kauspinta-ala on mahdollisimman suuri.

$$A = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} \qquad \text{2 muuttujaa.}$$

Merkitään kantaa x:llä ja korkeutta y:llä, eli $A = A(x, y) = xy$.
Millä tavoin x ja y ovat sidoksissa keskenään on oleellisin ja tehtävän kannalta ratkaisevin kysymys.

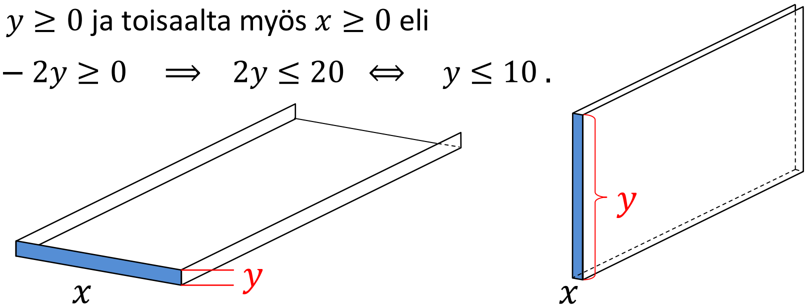
Tiedetään, että $x + 2y = 20$ cm, jolloin $x = 20 - 2y$ cm. (Nyt kanta x on ilmoitettu korkeuden y avulla.) Näin ollen

$$A = A(y) = (20 - 2y)y = 20y - 2y^2 \,.$$

Pohditaan hieman sopivaa väliä, jolle y kuuluu.

Selvästi $y \geq 0$ ja toisaalta myös $x \geq 0$ eli

$$20 - 2y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2y \leq 20 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 10\,.$$



Siis $\quad 0 \leq y \leq 10.$

Pinta-alafunktio A: $A(y) = 20y - 2y^2$ on polynomifunktiona jva & deriv. $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad A'(y) = 20 - 4y$$

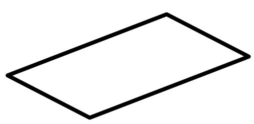
ja

$$\Rightarrow \quad A'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5, \qquad \text{OK} \quad 5 \in [0,10]\,.$$

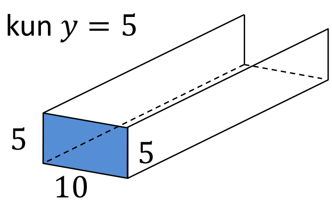
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(0) = 20 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0 \\ A(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 100 - 50 = 50 \\ A(10) = 20 \cdot 10 - 2 \cdot 10^2 = 200 - 200 = 0 \end{cases}$$

Tulkinta:

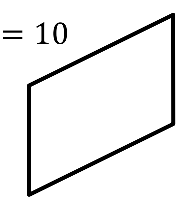
Kun $y = 0$



kun $y = 5$



kun $y = 10$



Taivutus tulee tehdä siten, että korkeus y on puolet kannasta.

Lisäksi derivaatan merkkikaaviosta ja funktion kulkukaaviosta voidaan maksimikohta $x = 5$ todeta.

	0	5	10
$A'(y)$	$+$	$-$	
$A(y)$	$\nearrow$	$\searrow$