Tulon ja osamäärän derivaatta

Miten derivoidaan kahden funktion f ja g tulo fg ja osamäärä $\frac{f}{g}$?
Kirjassa on perusteltu tulon derivoimiskaava (löytyy myös MAOLsta)

$$Dfg = Df \cdot g + f \cdot Dg \, .$$

Esimerkki Olkoot f: $f(x) = 2x - 1$ ja g: $g(x) = x^3 + 2x$. Tällöin

$$\begin{aligned} D\big((2x-1)(x^3+2x)\big) &= D(2x-1)\cdot(x^3+2x) + (2x-1)\cdot D(x^3+2x). \\ &= 2\cdot(x^3+2x) + (2x-1)\cdot(3x^2+2) \\ &= 2x^3 + 4x + 6x^3 + 4x - 3x^2 - 2 \\ &= 8x^3 - 3x^2 + 8x - 2 \end{aligned}$$

Perustellaan osamäärän derivoimiskaava.

$$D\frac{f}{g} = \frac{Df \cdot g - f \cdot Dg}{g^2}.$$

Olkoot f ja g derivoituvia kohdassa x. Oletetaan aluksi, että funktio f: $f(x) = 1$, siis vakiofunktio, jolloin $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)}$. Tällöin

$$D\frac{1}{g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)} = -g'(x)\cdot\frac{1}{\big(g(x)\big)^2}$$

Olkoon sitten f mikä tahansa derivoituva funktio. Hyödynnetään jo opittua tulon fg derivoimissääntöä $Dfg = Df \cdot g + f \cdot Dg$. Nyt kyseiset funktiot ovat

$$\text{"}f\text{"} = f \quad \text{ja} \quad \text{"}g\text{"} = \frac{1}{g} \, .$$

Eli

$$D\frac{f}{g} = D\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = Df \cdot \frac{1}{g} + f\, D\frac{1}{g}$$

Tämä on jo tehty!

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-g' \cdot \frac{1}{g^2}\right)$$

Lavennetaan samannimiseksi

$$= \frac{f' \cdot g}{g^2} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Nämä löytyvät MAOLsta.

Esimerkki tulofunktio **ja** osamääräfunktio

Funktio f: $f(x) = \underbrace{(x^2 - x)}_{=f}\underbrace{(x^3 + 3x)}_{=g}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = (2x - 1)(x^3 + 3x) + (x^2 - x)(3x^2 + 3)$$

$$= \ \dots \ = 5x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6x$$

Funktio f: $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}, \quad x \neq 0.$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{2} - \frac{0 \cdot x^2 - 2 \cdot 2x}{(x^2)^2} = x - \frac{-4x}{x^4} = x + \frac{4}{x^3}, \qquad x \neq 0$$

TAI

Koska $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^4 - 4}{2x^2}$, niin

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(4x^3 - 0) \cdot 2x^2 - (x^4 - 4) \cdot 4x}{(2x^2)^2} = \frac{4x^5 + 16x}{4x^4}$$

$$= \frac{4x^5}{4x^4} + \frac{16x}{4x^4} = x + \frac{4}{x^3}, \qquad x \neq 0$$

Funktion kulun tarkastelussa tehdään siis *derivaatan merkkikaavio* ja *funktion kulkukaavio*.

Rationaalifunktion kulkua tutkittaessa on selvitettävä määrittelyehto (ehdot), monotonisuus (ääriarvot) ja asymptootit.

Esimerkki 2 Tutki funktion f: $f(x) = \frac{x^2}{2x+2}$ kulkua.

Määrittelyehto, jatkuvuus & derivoituvuus:
Funktion f on määritelty, jatkuva ja derivoituva, kun $x \neq -1$.

Derivaatan nollakohdat ja kulkukaavio:

$$f'(x) = \frac{2x(2x+2) - x^2 \cdot 2}{(2x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$$

Muista määrittelyehto!

	-2	-1	0	
$2x^2+4x$	+	−	−	+
$(2x+2)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Funktio f on siis aidosti kasvava, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 0$ ja aidosti vähenevä, kun $-2 \leq x < -1$ ja $-1 < x \leq 0$.
Asymptootit:
Nimittäjän nollakohdassa $x = 1$ on pystysuora asymptootti. Lisäksi, koska $x^2 = x^2 - 1 + 1$, niin

$$\frac{x^2}{2x+2} = \frac{x^2-1+1}{2x+2}$$

$$= \frac{x^2-1}{2x+2} + \frac{1}{2x+2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)} + \frac{1}{2x+2}$$

$$= \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2x+2}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+2}$$

$$\to 1/2 \cdot x - 1/2, \qquad \text{kun } x \to \pm\infty .$$