Funktion suurin ja pienin arvo

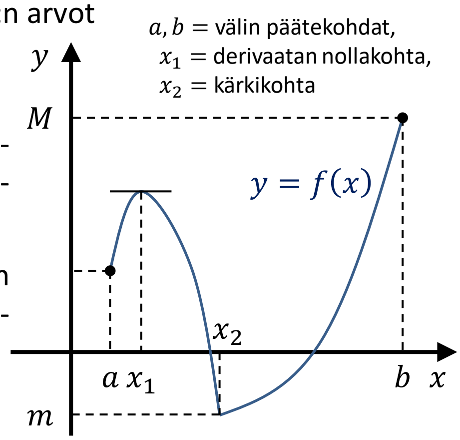
DERIVAATTA, MAA6

1. Suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

Lause, jatkuvan funktion ääriarvolause:
Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f saa aina pienimmän ja suurimman arvonsa.
Nämä arvot löydetään laskemalla f:n arvot

1) derivaatan nollakohdissa,
2) välin päätepisteissä tai
3) kuvaajan ”kärki”kohdissa (eli kohdissa, joissa derivaattaa ei ole olemassa).

ja valitsemalla näistä arvoista suurin ja pienin (usein merkitään $M =$ suurin arvo ja $m =$ pienin arvo).



Esimerkki Määritä funktion f: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[0,2]$.

Funktio f on polynomifunktiona jva ja deriv. Näin ollen

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)\,.$$

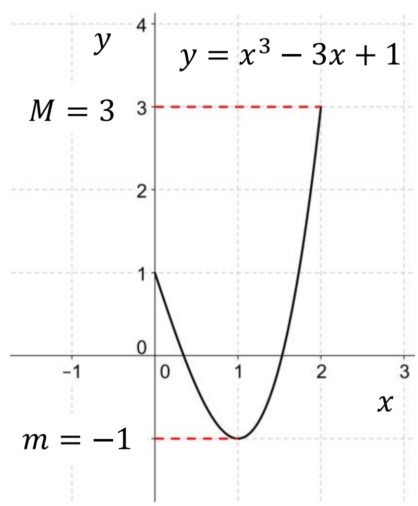
Derivaatan nollakohdat:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1,$$

joista $x_2 = -1$ ei kuulu tarkasteluvälille $[0,2]$.

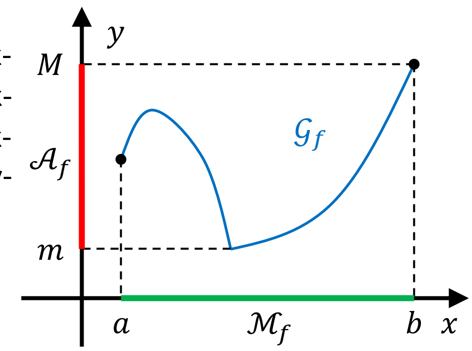
Saadaan

$$\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(1) = -1, & \text{minimi} \\ f(2) = 3, & \text{maksimi} \end{cases}$$



Jatkuvan funktion arvojoukko
Funktion f määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f$ koostuu kaikista niistä muuttujan x arvoista, joilla f on määritelty. Funktion f arvot $f(x)$ muodostavat arvojoukon $\mathcal{A}_f$.

Määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f$ saadaan funktion kuvaajan $\mathcal{G}_f$ projektiona x-akselille (vaaka-akselille) ja arvojoukko $\mathcal{A}_f$ projektiona y-akselille (pystyakselille).



Lause, jatkuvan funktion ääriarvolause (jatkuu):
Jatkuva funktio f saa suljetulla välillä $[a, b]$ kaikki arvot suurimman M ja pienimmän m arvon väliltä. Eli $\mathcal{A}_f = [m, M]$.

Todistus Yllä olevan kuvan nojalla OK, (tarvittaessa käydään läpi).

Todistus Olkoon siis f jva välillä $[a, b]$, jolle kohdassa $x = x_1$ pätee $f(x_1) = m$ ja kohdassa $x = x_2$ $f(x_2) = M$, kun $x_1, x_2 \in [a, b]$ ja $x_1 \neq x_2$.

Jos $m = M$, niin f on vakiofunktio ja asia selvä.
Jos $m \neq M$, niin tällöin on olemassa c siten, että

$$m < c < M\,.$$

Tarkastellaan funktiota g: $g(x) = f(x) - c$.
Nyt funktio g on jatkuva koska f on jva ja vakion vähentäminen ei muuta jatkuvuutta. Lisäksi ehdosta $m < c < M$ seuraa, että

$$g(x_1) = f(x_1) - c = m - c < 0,$$

$$g(x_2) = f(x_2) - c = M - c > 0.$$

Näin ollen Bolzanon lauseen (eli jatkuvan funktion nollakohtalauseen) nojalla funktiolla g on ainakin yksi nollakohta $x = x_0$ kohtien x_1 ja x_2 välissä. Mutta tämähän tarkoittaa, että

$$g(x_0) = 0, \qquad \text{siis } g(x_0) = f(x_0) - c = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad f(x_0) = c.$$

Siis f saa arvon c muuttujan x_0 arvolla. Mutta koska c oli mielivaltainen arvo välillä $]m, M[$, niin saatava tulos pätee kaikille välin $]m, M[$ arvoille.
Eli funktio f saa kaikki arvot väliltä $[m, M]$.

Huomautus Suljetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu, eli se ei voi saada mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja.

Funktion suurin ja pienin arvo

DERIVAATTA, MAA7

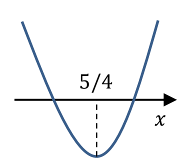
2. Suurin ja pienin arvo ei-suljetulla välillä

Nyt jatkuvalla funktiolla f ei välttämättä ole suurinta/pienintä arvoa. Niiden olemassaolo täytyy selvittää tutkimalla funktion kulkua, siis limeksiä!

Esimerkki **a)** Määritä funktion f: $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ suurin ja pienin arvo.
Väliä ei erikseen mainittu, se on tällöin laajin mahdollinen määrittelyjoukko, tässä tapauksessa $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Funktio f on ylöspäin aukeava paraabeli ja $f'(x) = 4x - 5$.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{17}{8} \ \text{min.}$$



Lisäksi $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2 - 5x + 1) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (2x^2 - 5x + 1) = \infty \end{cases}$, joten ei ole maksim.

b) Määritä funktion f: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ suurin ja pienin arvo
1° Määrittelyjoukossaan ($= \mathbb{R}$) 2° välillä $]0,2[$ (vrt. edellinen tunti).

1° Ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, sillä

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x + 1) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3 - 3x + 1) = \infty\,.$$

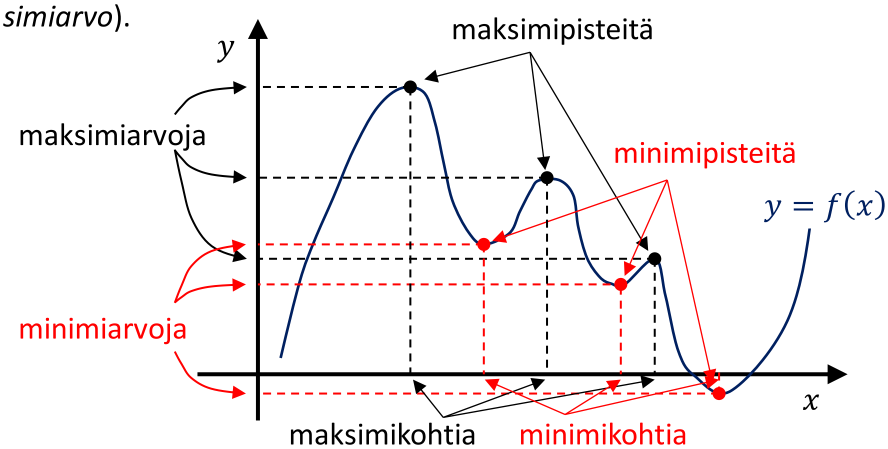
2° Suljetulla välillä $[0,2]$ funktio f sai minimin, kun $x = 1$, $f(1) = -1$. Maksimia ei nyt saavuteta, sillä

$$f(x) < f(2) = 3, \qquad f(x) \to 3, \qquad \text{kun } x \to 2-\,.$$

DERIVAATTA, MAA6

Funktion ääriarvot

Määritelmä, ääriarvokohdat ja ääriarvot:
Jos $f(x_0)$ on funktion f pienin (vastaavasti suurin) arvo kohdan x_0 eräässä ympäristössä, niin x_0 on funktion *minimikohta* (vast. *maksimikohta*) ja $f(x_0)$ on funktion f *minimi* eli *minimiarvo* (*maksimi* eli *maksimiarvo*).



Maksimi- ja minimikohdat ovat funktion *ääriarvokohtia* ja vastaavasti maksimi- ja minimiarvot ovat funktion *ääriarvoja*.

Funktiolla voi olla useita minimejä tai maksimeja, jaottelu lokaaleihin (eli paikallisiin) ja globaaleihin (yleisiin). Siis, lokaaleja ääriarvoja voi olla useita, mutta globaaleja vain yhdet. Huomaa, että globaali ääriarvo on samalla myös lokaali.

Lause, ääriarvot ja derivaatta:
Olkoon funktio f jatkuva kohdassa x_0 ja derivoituva kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuun ottamatta. Tällöin x_0 on funktion f

1) minimikohta, jos f' muuttuu tätä kohtaa ohittaessa negat. → posit.

x_0

$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

2) maksimikohta, jos f' muuttuu tätä kohtaa ohittaessa posit. → negat.

x_0

$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

Jos f' säilyttää merkkinsä, niin x_0 ei ole ääriarvokohta.

x_0

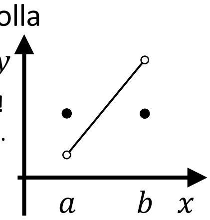
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↘

x_0

$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

Kaikkiaan funktion ääriarvokohtia, eli x:n arvoja voivat olla
- derivaatan nollakohdat, jotka tark. välillä,
- kärkikohdat, joissa funktio ei ole derivoituva,
- funktion epäjatkuvuuskohdat,
- määrittelyvälin päätekohdat, kun suljettu väli.

Huom! Ei glob. ääriarvoja.



Funktion kulun tutkiminen tarkoittaa funktion monotonisuuden ja ääriarvojen selvittämistä.

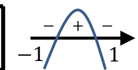
Esimerkki Määritä funktion $f\colon\ f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.
Funktio f on polynomifunktiona jva & deriv. $\forall x \in \mathbb{R}$. Saadaan

$$f'(x) = -2x^2 + 2$$

ja $f'(x) = 0$, kun $x = \pm 1$.

Derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

		-1		1	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↘



Näin ollen

$$\begin{cases} x = -1, & \text{on minimikohta} \\ x = 1, & \text{on maksimikohta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \ldots = -\dfrac{4}{3} \\ f(1) = \ldots = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Siis ääriarvot ovat: maksimi $\frac{4}{3}$ ja minimi $-\frac{4}{3}$.

Esimerkki Tutki välillä $[-4,2]$ määritellyn funktion

$$f\colon\ f(x) = x^5 - 15x^3 + 10$$

kulkua.
Siis monotonisuus ja ääriarvot. Nyt funktio f on polynomifunktiona jva & deriv. $\forall x \in \mathbb{R}$. Saadaan

$$f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9) = 5x^2(x-3)(x+3)$$

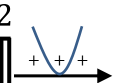
ja

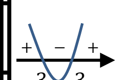
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad x = -3, \quad x = 3.$$

Huom! $x = 3$ ei kuulu välille $[-4,2]$.

Merkki- ja kulkukaavio:

	-4		-3		0		2
$5x^2$		$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$	
$f(x)$		↗		↘		↘	
	min		max		terassi		min





Minimikohdat: $x = -4,\ x = 2$.
Maksimikohdat: $x = -3$.
Minimiarvot:
$f(-4) = -54$, $f(2) = -78$
Maksimiarvo: $f(-3) = 172$
Funktio f on välillä $[-4,-3]$ aidosti kasvava ja välillä $[-3,2]$ aidosti vähenevä.