Funktion monotonisuus

Tarkastellaan funktion arvojen vaihtelua eli *funktion kulkua* derivaattaa hyödyntäen.

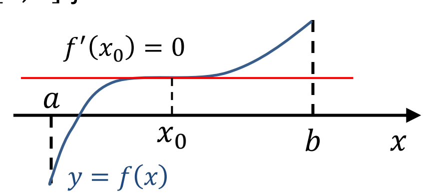
Määritelmä, kasvava / vähenevä funktio:
Olkoon f tietyllä reaalilukuvälillä määritelty funktio (väli voi olla avoin, suljettu, puoliavoin tai ääretön). Jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo aina

a) kasvaa, niin f on aidosti kasvava, eli $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
b) kasvaa tai pysyy samana, niin f on kasvava, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
c) vähenee, niin f on aidosti vähenevä, eli $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,
d) vähenee tai pysyy samana, niin f on vähenevä, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$,

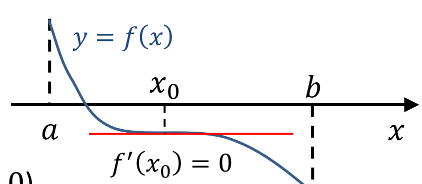
Yleisesti funktiota f kutsutaan (aidosti) monotoniseksi.

Määritelmä, funktion monotonisuus ja derivaatan merkit:
Olkoon funktio f jva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.

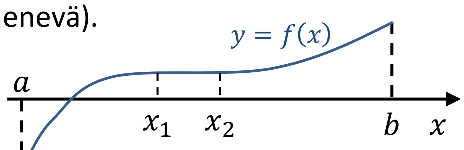
1) Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ yksittäisissä kohdissa x_0, niin f on aidosti kasvava.



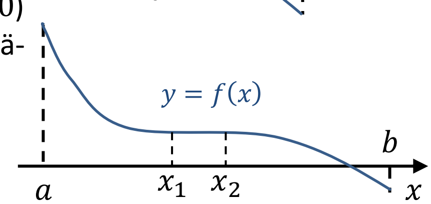
2) Jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ yksittäisissä kohdissa x_0, niin f on aidosti vähenevä.



3) & 4) Jos $f'(x) \geq 0$ (vast. $f'(x) \leq 0$) kaikilla $x \in]a, b[$, niin f on kasvava (vähenevä).



$f'(x) = 0$, kun $x_1 \leq x \leq x_2$



$f'(x) = 0$, kun $x_1 \leq x \leq x_2$

Huomautus Rationaalifunktion monotonisuutta tutkittaessa on huomattava, että edellistä lausetta voidaan soveltaa vain määrittelyehtojen muodostamilla väleillä. Nimittäjän nollakohdat jakavat reaaliakselin tarkasteltaviin osaväleihin. Tähän palataan kappaleessa 5.

Esimerkki 1 Tutki funktion **a)** f: $f(x) = 2 - x - x^3$ monotonisuutta ja samoin funktion **b)** g: $g(x) = 3x^4 - 4x^3$.
a) Funktio f on kaikkialla jva ja deriv. polynomifunktiona. Saadaan

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = -1 - 3x^2 \qquad \text{ja} \qquad f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Siis funktio f on aidosti vähenevä kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

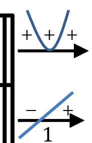
b) Funktio g on jva ja deriv. $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Saadaan

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 12x^3 - 12x^2 .$$

Milloin $g'(x) = 0$? Silloin, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Näin ollen g on aidosti vähenevä, kun $x \leq 1$. Huomaa, että myös kohdassa $x = 0$ on g aidosti vähenevä.

$0 \quad 1$

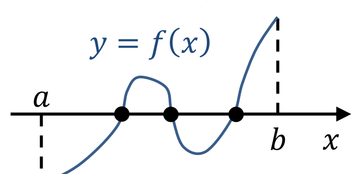
$12x^2$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$g'(x)$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$



Bolzanon lause

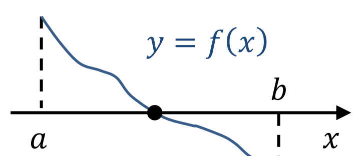
Tarkastellaan tärkeää tulosta:

Lause, Bolzanon lause eli jatkuvan funktion nollakohtalause:
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, eli toinen pos. toinen neg., niin tällöin f:llä on **ainakin** yksi nollakohta välillä $]a, b[$.
Huom. Nollakohtia saa olla enemmän!



3 nollakohtaa!

Jos lisäksi f on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$, niin nollakohtia on **korkeintaan** yksi välillä $]a, b[$.



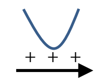
Bolzano + aito monotonisuus → nollakohtia **täsmälleen** yksi.

Huomautus Ei olla kiinnostuneita, millä $x = x_0$ nollakohta saavutetaan. Tämä (edellä käsitelty asia) on tärkeä nimenomaan nollakohtien lukumäärien olemassaolotodistuksille.

Esimerkki T – 149/Calc. 4. Osoita, että $x^3 + 3x = x^2 + 2$:llä on juuri.
a) Yhtälöä $x^3 + 3x = x^2 + 2$ vastaa funktio f: $f(x) = x^3 + 3x - x^2 - 2$ ja se on polynomifunktiona jva & deriv. $\forall x \in \mathbb{R}$, erityisesti kaikilla reaaliakselin osaväleillä $[a, b]$.

Funktion kulku: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$
$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0$, kun $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-36}}{6} \notin \mathbb{R}$.

$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$



Eli funktio f on aidosti kasvava $\forall x \in \mathbb{R}$ (aito monotonisuus selvä), OK.
Entä Bolzano?
Koska lisäksi

$$f(-10) = (-10)^3 + 3 \cdot (-10) - (-10)^2 - 2 = \ldots = -1132 < 0$$

$$f(10) = 10^3 + 3 \cdot 10 - 10^2 - 2 = \ldots = 928 > 0$$

niin myös Bolzano on voimassa välillä $[-10, 10]$.

Näin ollen voidaan todeta, että funktiolla f on täsmälleen yksi nolla-kohta ja alkuperäisellä yhtälöllä juuri = ratkaisu välillä $]-10, 10[$.