Polynomifunktion derivaatta

Määritelmän kautta derivoiminen on työlästä ja hidasta.

Lause, derivaatan laskusäännöt:
Oletetaan, että f ja g ovat derivoituvia ja $a \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin pätee
1) Vakion derivaatta on nolla, eli

$$Da = 0\,.$$

2) Potenssitermeissä ns. ”asteen pudotus”, eli

$$Dx^n = nx^{n-1}, \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Myöhemmin annetaan potenssille n laajempi joukko $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.
3) Vakion ”ulosotto”, eli

$$D\big(a \cdot f(x)\big) = a \cdot f'(x)\,.$$

4) Summan (erotuksen) derivaatta on derivaattojen summa (erotus)

$$D\big(f(x) \pm g(x)\big) = f'(x) \pm g'(x)\,.$$

Todistus Tarkastellaan **2)** kohtaa.
Kun $n = 2$:

neliöiden erotus

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{\boxed{z^2 - x^2}}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{(z-x)(z+x)}{z - x} = \lim_{z \to x}(z + x) = 2x\,.$$

Kun $n = 3$:

Täältä pitää löytyä $z - x$

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{\boxed{z^3 - x^3}}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{(z-x)(z^2 + zx + x^2)}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x}(z^2 + zx + x^2) = 3x^2.$$

Miten niin

$$z^3 - x^3 = (z - x)(z^2 + zx + x^2)\ ?$$

$$\begin{array}{r|cccc}
 & z^2 & +zx & & +x^2 \\
\hline
z - x & z^3 & & & -x^3 \\
 & \mp z^3 & \pm z^2x & & \\
\cline{2-3}
 & — & +z^2x & & \\
 & & \mp z^2x & \pm zx^2 & \\
\cline{3-4}
 & & — & +zx^2 & \\
 & & & \mp zx^2 & \pm x^3 \\
\cline{4-5}
 & & & — & —
\end{array}$$

Kun $n = n$, niin hyödynnetään MAOLsta saatavaa tulosta:

$$z^n - x^n = (z - x)\underbrace{(z^{n-1}x^0 + z^{n-2}x^1 + \ldots + z^1x^{n-2} + z^0x^{n-1})}_{\text{yhteensä } n \text{ kpl}}$$

tässä
miinus

Ja, kun $z \to x$, niin termi

$$(z^{n-1}x^0 + z^{n-2}x^1 + \ldots + z^1x^{n-2} + z^0x^{n-1}) \to n \cdot x^{n-1}$$

Eli

$$\lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x} = n \cdot x^{n-1} \,.$$

Huomautus Tämä yhdessä kohtien **3)** ja **4)** kanssa antaa tärkeän tuloksen:

Kaikki polynomit ovat derivoituvia $\forall x \in \mathbb{R}$ *!*