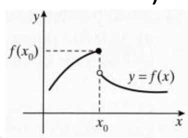
Funktion jatkuvuus

Intuitiivinen ajatus jatkuvuudesta on: yhtenäinen, katkeamaton, kuvaaja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista, jne.
(Intuitiivinen = välittömästi tajuttu, luontainen, aistillinen, spontaani, ei-opittu, ”ekana” mieleen tuleva.)

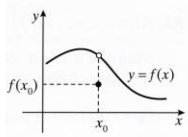
OK, entä matemaattisesti?
→ Tarkastellaan kuvia.

Minkä johtopäätöksen näistä voi tehdä?



Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa x_0. Käyrä katkeaa kohdassa x_0.

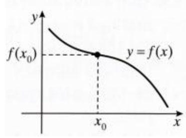
Syy: $\lim_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f(x)$



Raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa, mutta se ei ole sama kuin $f(x_0)$. Käyrä katkeaa kohdassa x_0.

kohdassa x_0

Syy: $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$



Raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ja funktion arvo $f(x_0)$ ovat samat. Käyrä on katkeamaton ja funktio jatkuva kohdassa x_0.

Tullaan tulokseen, että kun kohdassa $x_0 \in \mathcal{M}_f$ funktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo, niin silloin funktio f on jatkuva kohdassa. Eli f:n kuvaaja, käyrä $y = f(x)$, on katkeamaton.

Määritelmä, funktion jatkuvuus:
Olkoon f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä. Funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos sen raja-arvo ja arvo ovat yhtäsuuret, eli

$$f \text{ jatkuva } x_0\text{:ssa} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ on olemassa ja } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jos f ei ole jatkuva, niin se on epäjatkuva kyseisessä kohdassa $x = x_0$.

Lisäksi sanotaan, että

- funktio f on jatkuva välillä I / joukossa A, jos se on jatkuva $\forall x \in I/A$,
- funktio f on vasemmalta (oikealta) jatkuva kohdassa x_0, jos sen vasemmanpuoleinen (oikeanpuoleinen) raja-arvo on yhtäsuuri kuin funktion arvo.

Esimerkki **a)** Funktio f, määriteltynä lausekkeilla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $x = x_0 = 1$, sillä

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$$

ja

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-x + 3) = -1 + 3 = 2$$

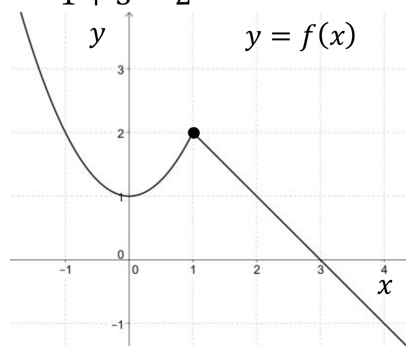
ovat samat, eli

$$\lim_{x \to 1} f(1) = 2.$$

Sekä lisäksi

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$\Longrightarrow \quad f(1) = \lim_{x \to 1} f(1) = 2.$$



Esimerkki **b)** Funktio f: $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x < 0 \\ x^2 - x, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$ ei ole jatkuva kohdassa $x_0 = 0$, sillä

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0+} f(x) \ .$$

c) Funktio f: $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x_0 = 0$, sillä

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 \quad (= f(0) = 0) \ .$$

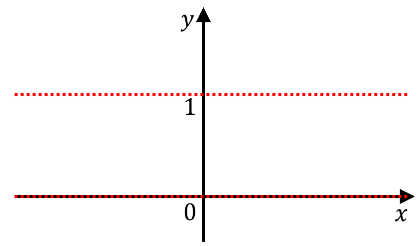
d) Funktion f: $f(x) = \frac{1}{x}$ jatkuvuutta kohdassa $x_0 = 0$ ei tiedetä, sillä f ei ole määritelty 0:ssa. Jos määritellään $f(0) = 0$, eli

$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases} \ ,$$

niin tällöin f on epäjatkuva kohdassa $x_0 = 0$.

Esimerkki **e)** Kaikkialla epäjatkuva funktio on esim. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

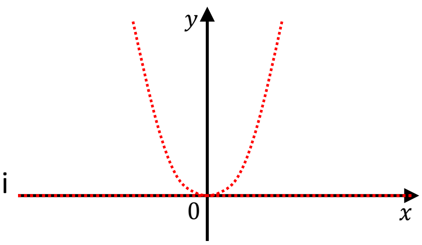
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$



Toisaalta funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $x_0 = 0$, mutta ei missään muussa kohdassa.



Huomautus Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan. Erityisesti kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

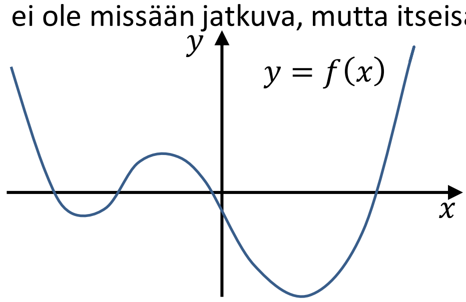
Huomautus (jatkuu) Jatkuvuus määriteltiin raja-arvojen kautta → Näin ollen jos funktiot f ja g ovat jatkuvia kohdassa x_0, niin jatkuvia (kohdassa x_0) ovat myös funktiot

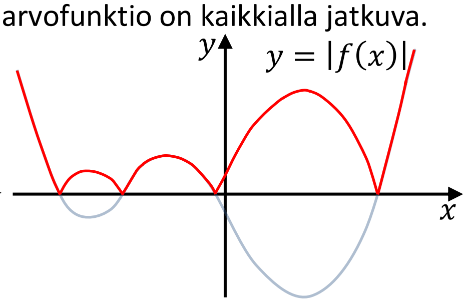
$$f \pm g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g}, g \neq 0, \qquad c \cdot f, c \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad h = g(f)\,.$$

Jos f on jatkuva, niin siitä seuraa, että myös $|f|$ on jatkuva, katso kuvat alla.
Toisinpäin ei päde, esimerkiksi funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ -1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole missään jatkuva, mutta itseisarvofunktio on kaikkialla jatkuva.

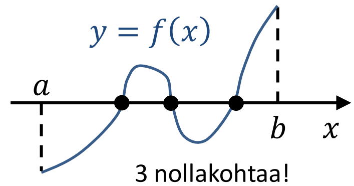




Bolzanon lause

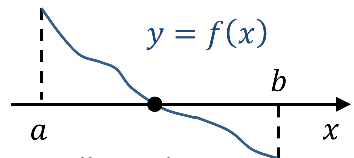
Tarkastellaan tärkeää tulosta:

Lause, Bolzanon lause eli jatkuvan funktion nollakohtalause:
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, eli toinen pos. toinen neg., niin tällöin f:llä on **ainakin** yksi nollakohta välillä $]a, b[$.
Huom. Nollakohtia saa olla enemmän!



3 nollakohtaa!

Jos lisäksi f on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$, niin nollakohtia on **korkeintaan** yksi välillä $]a, b[$.



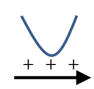
Bolzano + aito monotonisuus → nollakohtia **täsmälleen** yksi.

Huomautus Ei olla kiinnostuneita, millä $x = x_0$ nollakohta saavutetaan. Tämä (edellä käsitelty asia) on tärkeä nimenomaan nollakohtien lukumäärien olemassaolotodistuksille.

Esimerkki T – 149/Calc. 4. Osoita, että $x^3 + 3x = x^2 + 2$:llä on juuri.
Yhtälöä $x^3 + 3x = x^2 + 2$ vastaa funktio f: $f(x) = x^3 + 3x - x^2 - 2$ ja se on polynomifunktiona jva & deriv. $\forall x \in \mathbb{R}$, erityisesti kaikilla reaaliakselin osaväleillä $[a, b]$.

Funktion kulku: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$
$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0$, kun $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-36}}{6} \notin \mathbb{R}$.

$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗



Eli funktio f on aidosti kasvava $\forall x \in \mathbb{R}$ (aito monotonisuus selvä), OK.
Entä Bolzano?
Koska lisäksi

$$f(-10) = (-10)^3 + 3 \cdot (-10) - (-10)^2 - 2 = \ldots = -1132 < 0$$

$$f(10) = 10^3 + 3 \cdot 10 - 10^2 - 2 = \ldots = 928 > 0$$

niin myös Bolzano on voimassa välillä $[-10,10]$.

Näin ollen voidaan todeta, että funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta ja alkuperäisellä yhtälöllä juuri = ratkaisu välillä $]-10,10[$.