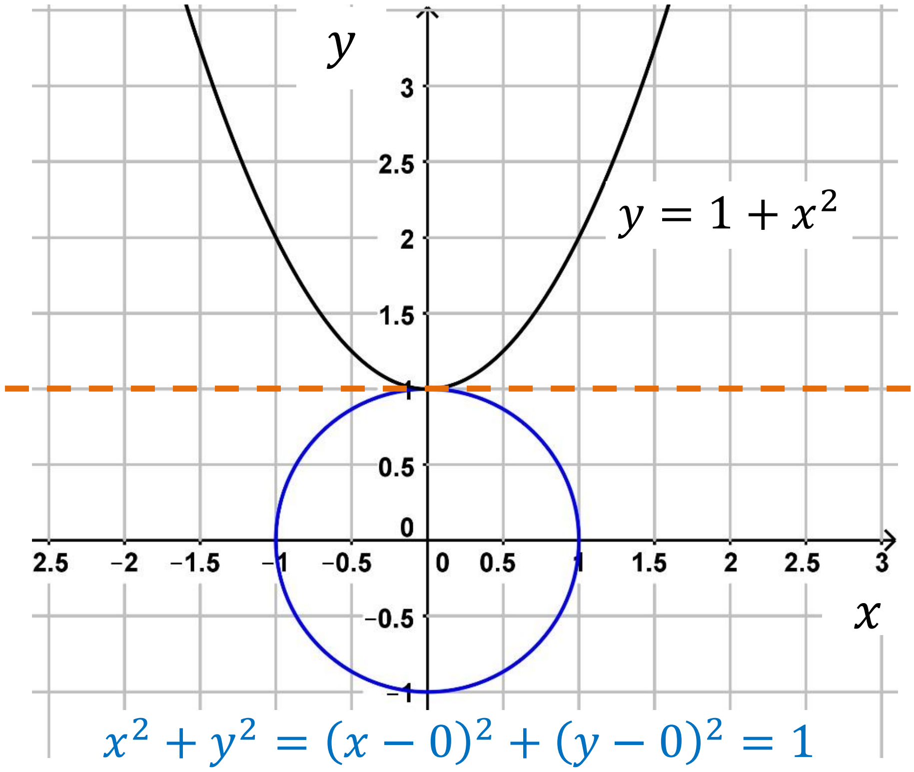
# VASTAUKSET TANGENTTITEHTÄVIIN S84 JA S92

**ESIMERKKI 1** *Määritä käyrien $y = 1 + x^2$ ja $x^2 + y^2 = 1$ yhteiset tangentit.[S84]*

**Aluksi:** Käyrä $y = 1 + x^2$ on ylöspäin aukeava paraabeli ja käyrä $x^2 + y^2 = 1$ on origokeskinen, 1-säteinen ympyrä.




Kuvan perusteella näyttäisi olevan vain yksi yhteinen tangentti, nimittäin $x$-akselin suuntainen suora $y = 1$, mutta…

Paraabelin tangentit ovat muotoa (kohdassa $x = x_0 \in \mathbb{R}$)

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \overset{y=1+x^2}{\Longrightarrow} \quad y - (1 - {x_0}^2) = 2x_0(x - x_0)$$

$$\Longrightarrow \quad y = 2x_0 x - 2{x_0}^2 + 1 + {x_0}^2$$

$$y = \underbrace{2x_0}_{\substack{\text{kulma–}\\ \text{kerroin}}} \cdot x \underbrace{-{x_0}^2 + 1}_{\text{vakio–osa}}$$

Mitkä näistä sivuavat ympyrää? Ne, joiden etäisyys origosta on 1. → Käytetään siis etäisyysyhtälöä

$$1 = d = \frac{|a\hat{x}_0 + b\hat{y}_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \text{missä } (\hat{x}_0, \hat{y}_0) = (0{,}0) \text{ ja}$$

$a = -2x_0, b = 1$, kun tangentit (suorat) ovat normaalimuodossa, eli

$$y = 2x_0 \cdot x - {x_0}^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-2x_0}_{=a} \cdot x + \underbrace{1}_{=b} \cdot y \underbrace{+{x_0}^2 - 1}_{=c} = 0\,.$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \frac{|-2x_0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + {x_0}^2 - 1|}{\sqrt{(-2x_0)^2 + 1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{(-2x_0)^2 + 1^2} = |{x_0}^2 - 1|$$

Molemmat yhtälön puolet ovat positiivisia, joten voidaan korottaa toiseen potenssii.

$$\overset{\uparrow 2}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad 4{x_0}^2 + 1 = {x_0}^4 - 2{x_0}^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad 6{x_0}^2 - {x_0}^4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad {x_0}^2(6 - {x_0}^2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 0 \ \text{ tai } \ x_0 = \pm\sqrt{6}$$

Lopuksi, sijoitetaan tangentin yhtälöön $y = 2x_0 \cdot x - {x_0}^2 + 1$. Saadaan

$$y = 1 \quad \text{tai} \quad y = \pm 2\sqrt{6}x - 6 + 1 = \pm 2\sqrt{6}x - 5$$

**ESIMERKKI 2** *Määritä käyrän $y = x^3 + 1$ ja sen pisteeseen $(1,2)$ piirretyn tangentin leikkauspiste.[S92]*

**Aluksi:** Leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat molemmat yhtälöt. Huomaa, että piste $(1,2)$ on sivuamispiste, ei leikkauspiste.

Tangentin yhtälö: $y - 2 = k(x - 1)$, missä $k = y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$. Siis

$$y - 2 = 3(x - 1) = 3x - 3 \qquad \Rightarrow \qquad y = 3x - 1\,.$$

Leikkauspisteen $y$- ja $x$-koordinaatit pitää olla samat, joten

$$y = y$$

$$x^3 + 1 = 3x - 1$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = 0\,.$$

Havaitaan, että $x = 1$ toteuttaa yhtälön. Onko muita 0-kohtia? Laskin tai tekijälause $P(x) = Q(x)(x - a)$ & polynomin jakokulma antavat, että $x = 1$ on kaksinkertainen nollakohta ja $x = -2$ on toinen 0-kohta. Enempää 3.asteen polynomilla ei nollakohtia voi ollakaan.

Näin ollen

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)\,.$$

Näissä kohdissa $y$-koordinaatin arvoksi tulee (eikä ole väliä käyttääkö suoran vai käyrän yhtälöä)

**Kun $x = 1$:** $y = 1^3 + 1 = 2$ (Vastaavasti $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$)

**Kun $x = -2$:** $y = (-2)^3 + 1 = -7$ (Vastaavasti $y = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$)

∴ Leikkauspisteeksi jää näin ollen piste $(-2, -7)$, koska piste $(1,2)$ oli sivuamispiste.