Derivaatta

MÄÄRITELMÄ *Jos erotusosamäärän raja-arvo*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

on olemassa, niin sitä sanotaan funktion f derivaataksi kohdassa x ja merkitään

$$f'(x), \qquad Df(x), \qquad \frac{df}{dx}.$$

Tällöin funktio f on derivoituva kohdassa x.

(Derivaatta $f'(x)$ ilmaisee funktion f *hetkellisen muutosnopeuden* kohdassa x ja sen geometrinen tulkinta on käyrän $y = f(x)$ pisteen $\big(x, f(x)\big)$ kautta kulkevan tangentin kulmakerroin.)

Siis *erotus – osamäärän – raja-arvo*, kolme kohtaa:

1) Ensin erotetaan jotain, eli tehdään vähennyslaskut

$$\begin{cases} f(x+\Delta x) - f(x) = \text{jokin luku } (\Delta f = \text{pystyakseliarvojen erotus}) \\ (x+\Delta x) - x = \Delta x = \text{jokin luku } (\Delta x = \text{vaaka} - \text{akseliarvojen erotus}) \end{cases}$$

2) Sitten näistä luvuista tehdään jakolasku eli osamäärä

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{\text{jokin luku}}{\text{jokin luku}} = \text{jokin luku}$$

3) Kohdat 1) ja 2) suoritetaan yhä uudelleen ja uudelleen, mutta aina otetaan sellainen Δx, joka on pienempi kuin edellinen ja katsotaan mitä lukua osamäärien eli jakolaskujen tulokset lähenevät. Tämä on rajalle menoa eli rajankäyntiä.

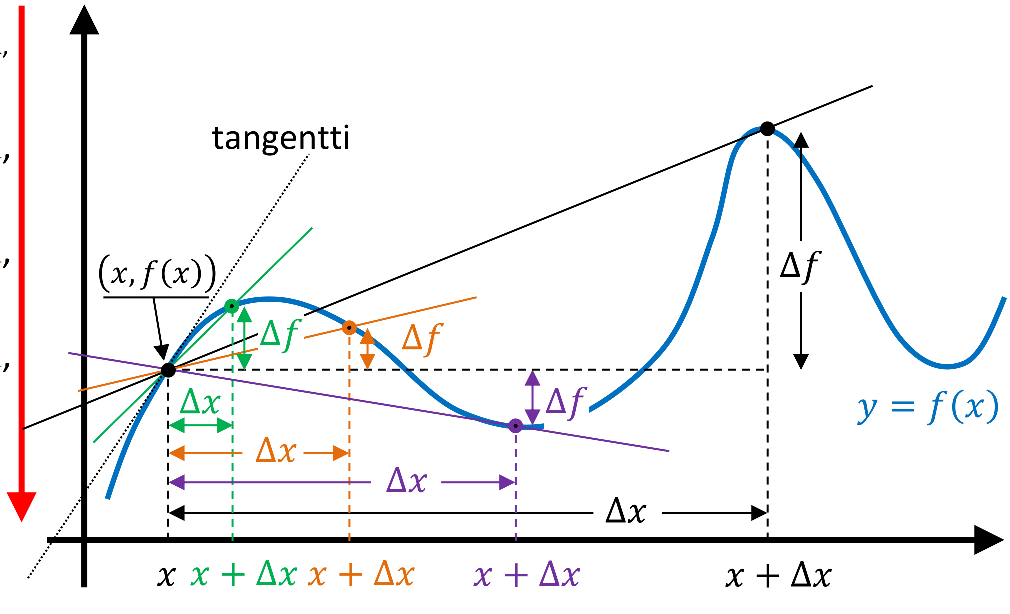
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\vdots$



Se luku, mitä nämä luvut lähestyvät on derivaatan arvo kohdassa x, eli käyrän pisteeseen $\big(x, f(x)\big)$ asetetun tangentin kulmakerroin.

Derivaatta

MÄÄRITELMÄ *Jos erotusosamäärän raja-arvo*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

on olemassa, niin sitä sanotaan funktion f derivaataksi kohdassa x ja merkitään

$$f'(x), \qquad Df(x), \qquad \frac{df}{dx}.$$

Tällöin funktio f on derivoituva kohdassa x.

(Derivaatta $f'(x)$ ilmaisee funktion f *hetkellisen muutosnopeuden* kohdassa x ja sen geometrinen tulkinta on käyrän $y = f(x)$ pisteen $\big(x, f(x)\big)$ kautta kulkevan tangentin kulmakerroin.)

Siis *erotus – osamäärän – raja-arvo*, kolme kohtaa:

1) Ensin erotetaan jotain, eli tehdään vähennyslaskut

$$\begin{cases} f(x+\Delta x) - f(x) = \text{jokin luku } (\Delta f = \text{pystyakseliarvojen erotus}) \\ (x+\Delta x) - x = \Delta x = \text{jokin luku } (\Delta x = \text{vaaka} - \text{akseliarvojen erotus}) \end{cases}$$

2) Sitten näistä luvuista tehdään jakolasku eli osamäärä

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{\text{jokin luku}}{\text{jokin luku}} = \text{jokin luku}$$

3) Kohdat 1) ja 2) suoritetaan yhä uudelleen ja uudelleen, mutta aina otetaan sellainen Δx, joka on pienempi kuin edellinen ja katsotaan mitä lukua osamäärien eli jakolaskujen tulokset lähenevät. Tämä on rajalle menoa eli rajankäyntiä.

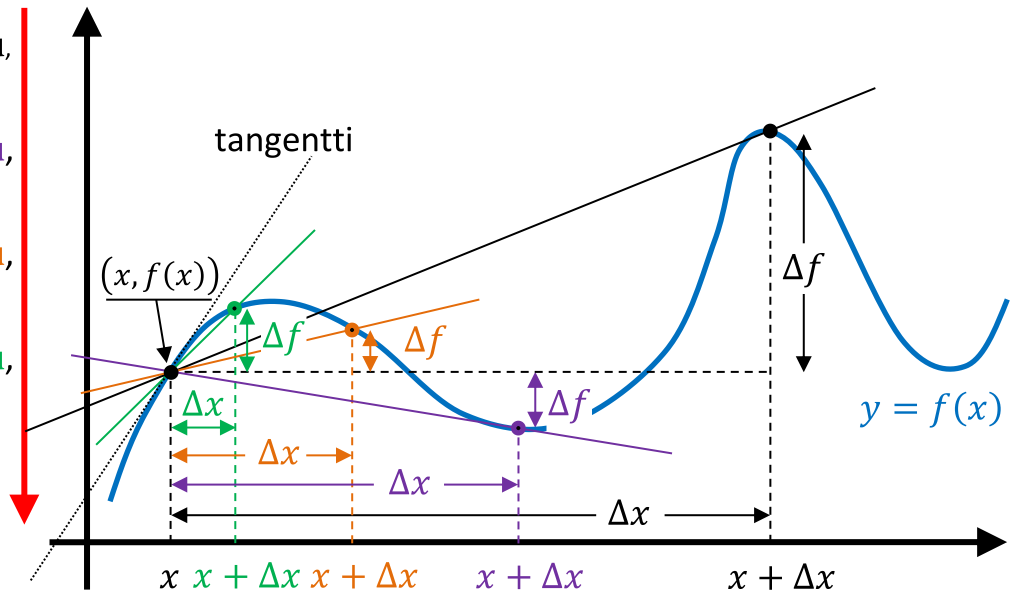
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \text{jokin luku},$

$\vdots$



Se luku, mitä nämä luvut lähestyvät on derivaatan arvo kohdassa x, eli käyrän pisteeseen $\big(x, f(x)\big)$ asetetun tangentin kulmakerroin.