Tehtävien ratkaisut tulee olla esim. Libre officen -writer ohjelmalla tehtyjä. Liitä vastauksiisi kuvia GeoGebrasta ja esim. TI-*n*Spire ohjelmalla tuotettuja matemaattisia ratkaisuja.

1. Laajennetaan raja-arvon käsitettä sekä harjoitellaan asymptoottien piirtämistä ja määrittämistä. Asymptoottihan oli sellainen rajasuora tai rajakäyrä, jota funktion kuvaaja lähestyy, kun muuttuja lähestyy $\pm\infty$ tai niitä kohtia, joissa funktiota ei ole määritelty. 1-tehtävässä tarkastellaan lähestymistä kohti $\pm\infty$.

a) **Piirrä funktion $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{x}$ kuvaaja. Piirrä katkoviivalla $\boldsymbol{y = 0}$ eli $\boldsymbol{x}$-akselin päälle suora.**

Kun x *vähenee rajatta* ts. $x \to -\infty$, niin ”Selvästi” f:n arvot lähestyvät nollaa ja siksi sanotaan, että f:llä on *miinus äärettömyydessä (epäolennainen) raja-arvo* 0. Tätä merkitään $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$. Vastaavasti, kun $x \to \infty$, eli kun x *kasvaa rajatta*, niin f:n arvo lähenee nollaa ja f:llä on *plus äärettömyydessä (epäolennainen) raja-arvo* 0, merkitään $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Laske ja piirrä kuvaaja sekä asymptootti

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right), \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}, \qquad \textbf{iii)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-6x}{3x+2}$$

Merkintä $x \to \pm\infty$ tarkoittaa raja-arvoja $x \to +\infty$ ja $x \to -\infty$.

Minkä johtopäätöksen voit tehdä. **Täydennä: Yleisesti, jos osoittajan ja nimittäjän asteet ovat samat, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on korkeimman asteen termien kerrointen __________________ (mikä peruslaskutoimitus?). Asymptoottina on ____________________.**

b) Entäpä, jos nimittäjän aste on isompi kuin osoittajan? Tarkastele seuraavaa esimerkkiä (piirrä kuvaaja)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{4x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{5}{x}}{4+\frac{2}{x}} = 0\cdot\frac{1}{4} = 0\,.$$

Täydennä: Yleisesti, aina kun osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on _________________. Asymptoottina on siis ___________________.

c) Kun osoittajan aste on suurempi kuin nimittäjän, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on $+\infty$ tai $-\infty$. Eivät välttämättä ole samoja, esimerkiksi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x}}="\infty"\cdot\frac{3}{2}="\infty",.$$

ja toisaalta

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^2+5x}=\ldots="-\infty"\cdot\frac{3}{2}="-\infty".$$

Piirrä käyrä ja totea edellä eri raja-arvot.

2. 2-tehtävässä tarkastellaan lähestymistä niitä kohtia, joissa funktiota ei ole määritelty. Tarkastellaan funktiota $f: f(x)=\frac{1}{x-2}$ ja piirretään funktion f kuvaaja eli käyrä $y=\frac{1}{x-2}$.

Nyt, kun $x\to 2-$, niin funktion f arvot näyttävät vähenevän rajatta. Vastaavasti, kun $x\to 2+$, niin f:n arvot näyttävät kasvavan rajatta.

Sanotaan, että funktiolla f on kohdassa $x=2$ (epäoleellinen) vasemmanpuoleinen raja-arvo $-\infty$ ja vast. (epäoleellinen) oikeanpuoleinen raja-arvo $+\infty$. Käyrä $y=\frac{1}{x-2}$ lähenee suoraa $x=2$ sitä saavuttamatta.

Sanotaan, että käyrällä on pystysuorana asymptoottina suora $x=2$.

Määritä käyrän $y=\frac{x^2}{1-x}$ asymptootit ja piirrä kuvaaja.

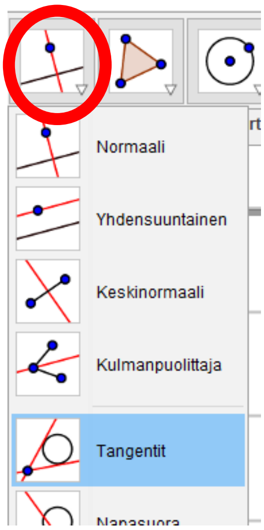
(VIHJE: Toisen saat helposti, toista varten huijaa aluksi lisäämällä osoittajaan nolla muodossa $1-1$. Näin saat osoittajaan neliöiden erotuksen, josta pääset eteenpäin.)

Yhteenvetoa – asymptoottien määrittäminen

Rationaalifunktion kuvaajalla on

- *pystysuora asymptootti* $x=x_0$ nimittäjän niissä nollakohdissa, jois-sa osoittaja $\neq 0$,
- *vaakasuora asymptootti* $y=0$ eli x-akseli, jos osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän,
- *vaakasuora asymptootti* $y=y_0$ $(\neq 0)$ eli x-akselin suuntainen suo-ra, jos osoittajan ja nimittäjän asteet ovat samat,
- *vino suoraviivainen asymptootti* $y=ax+b$ $(a\neq 0)$, jos osittajan aste on yhtä suurempi kuin nimittäjän,
- *vino käyräviivainen asymptootti* $y=f(x)$, jos osoittajan aste on vähintään kahta suurempi kuin nimittäjän.

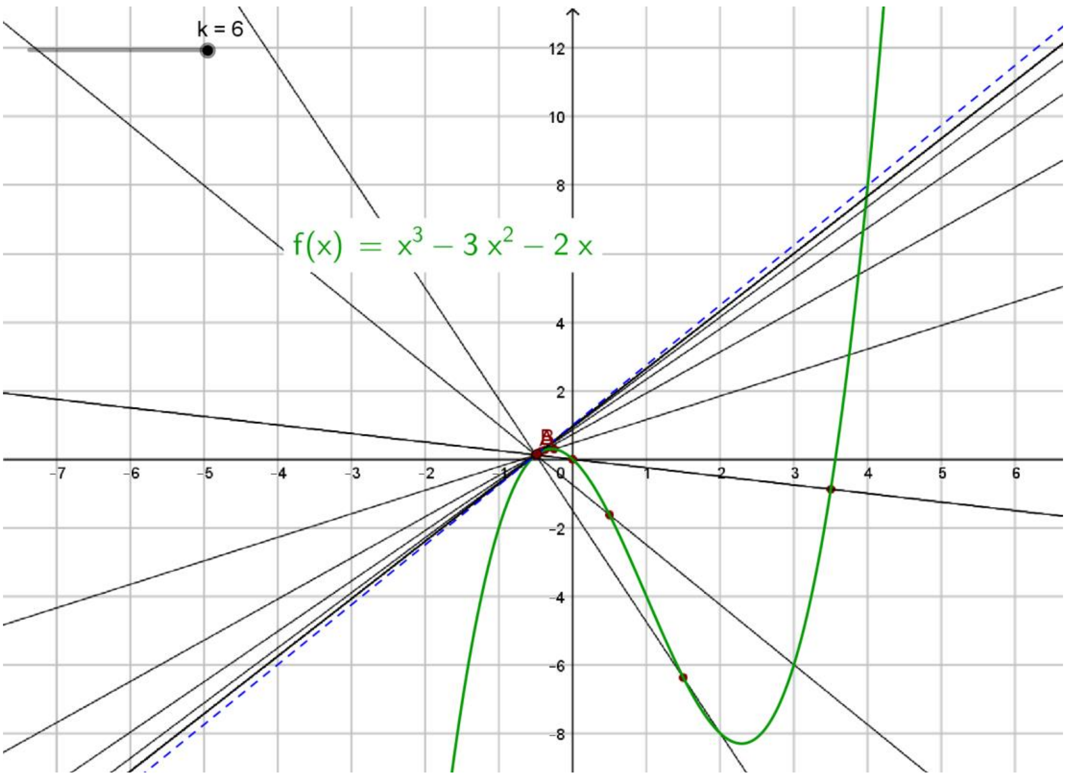
3. Tarkastellaan vielä lopuksi derivaatan määritelmää. Kirjoita Geogebran syöttökenttään polynomifunktio $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x$ eli f(x)=x^3-3x^2-2x sekä pisteet $A = \left(-0.5, f(-0.5)\right)$ ja $B = \left(-0.5 + 2^{-k}, f(-0.5 + 2^{-k})\right)$ eli A=(-0.5, f(-0.5)) ja B=(-0.5+2^(-k), f(-0.5+2^(-k))). Geogebra kysyy, luodaanko liukusäätimet→ Luodaan. Aseta liukusäätimen asetukset seuraavasti: alaraja -2, yläraja 6 ja animaatioaskel 1. Kokeile miten piste B liikkuu funktion kuvaajalla. Piirrä sitten suora pisteiden A ja B kautta. Aseta sekä suoran että pisteen B jälki käyttöön (eli algebraikkunassa paina suoran/pisteen B kohdalla hiiren kakkospainiketta ja valitse jälki käyttöön.) Lopuksi vie liukusäädin arvoon -2, paina CTRL+F ja sitten liikuta liukusäädintä arvoon 6. Tee havaintoja.



Pohdi erotusosamäärän raja-arvoa, sekantteja ja lopuksi piirrä tangentti pisteeseen A. Eli valitse tangentti (katso kuva), paina piste A ja sitten funktion f kuvaajaa. Hyödynnä värejä!

Liitä lopuksi näyttökuva, jossa näkyy funktio, sekantit ja tangentti, vastaukseesi.

Tulisi näyttää tältä.



Tallenna *omanimi_sukunimi* -muodossa pedan tallennuskansioon palautuspäivämäärään mennessä.