Matematiikan kurssikoe, Maa6 – Derivaatta – RATKAISUT **Sievin lukio**
Torstai 23.9.2017
VASTAA YHTEENSÄ KUUTEEN TEHTÄVÄÄN
MAOL-taulukkokirja on sallittu. Vaihtoehtoisesti voit käyttää aineistot-osiossa olevaa matikan taulukkotieto-osaa.

A-osa: VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN 1 – 2

1. a) Selitä käsitteet ja määritelmät (lyhyesti), lisää tarvittaessa matemaattinen merkintätapa.

i) Erotusosamäärä

ii) Asymptootti

iii) Funktion monotonisuus

i) Olkoon f kohdan x_0 ympäristössä määritelty funktio. Funktion f arvon *keskimääräisen muutosnopeuden* kohdasta x_0 kohtaan $x \neq x_0$ ilmoittaa *erotusosamäärä*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{(useita merkintätapoja).}$$

Geometrisesti erotusosamäärä on käyrän $y = f(x)$ pisteiden $\left(x, f(x)\right)$ ja $\left(x_0, f(x_0)\right)$ kautta kulkevan sekantin kulmakerroin.

ii) Asymptootti on rajasuora tai rajakäyrä, jota funktion kuvaaja rajatta lähestyy sitä kuitenkaan saavuttamatta, kun muuttuja saa joko mielivaltaisen suuria/pieniä arvoja tai kun muuttuja lähestyy kohtaa, jossa funktio ei ole määritelty (esimerkiksi rationaalifunktion nimittäjän nollakohdat).

iii) Funktion monotonisuus tarkoittaa, että funktio on tarkasteltavalla välillä joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä. Se ilmaisee funktion käyttäytymistä (kulkua) eli vaaditun järjestyksen (ehdon) säilymistä. Kasvavalle funktiolle pätee (aitous poistaa yhtäsuuruuden)

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

ja vähenevälle

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(y).$$

b) Mikä seuraavista funktioista ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$? Riittää vastata pelkällä alakohdalla, esim. kohta i).

i)

$$\boldsymbol{f: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2, & \text{kun } x \neq 3 \\ -1, & \text{kun } x = 3 \end{cases}}$$

ii)

$$\boldsymbol{g: g(x) = \begin{cases} -2 + x^2, & \text{kun } x \leq 2 \\ 4 - x, & \text{kun } x > 2 \end{cases}}$$

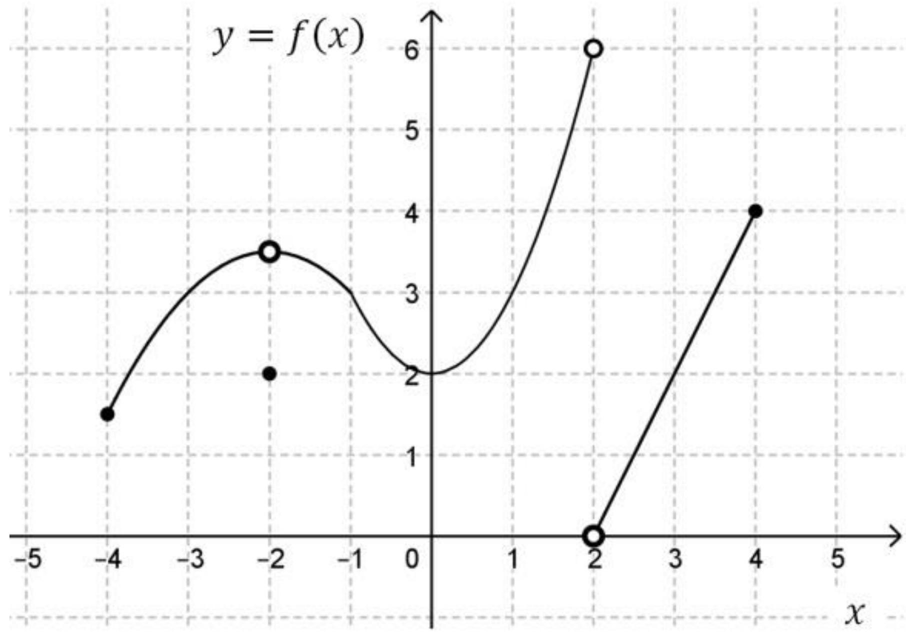
iii)

$$\boldsymbol{h: h(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2}, & \text{kun } x < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}}$$

VASTAUS: kohta iii)

c) Määritä alla olevaa kuvaajaa hyödyntäen seuraavat raja-arvot. Riittää esim. kohta i) $= -3$.

i) $\lim_{x\to -2} f(x)$ **ii)** $\lim_{x\to 2+} f(x)$ **iii)** $\lim_{x\to -4+} f(x)$



VASTAUS: kohta i) ≈ 3,5 kohta ii) ≈ 0 kohta iii) ≈ 1,5

2. a) Derivoi määritelmän kautta funktio f (välivaiheet näkyviin), eli muodosta erotusosamäärän raja-arvo,

$$f: f(x) = 2x^2 - 1.$$

Laske lisäksi derivaatan eli derivaattafunktion f' arvo kohdassa $x = -3$. (3p)

b) Sievennä lauseke. (1p)

$$x - \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

c) Ratkaise epäyhtälö. (2p)

$$\frac{8 - x^2}{x^2 - 4} \geq -2$$

a) Muodostetaan erotusosamäärän raja-arvo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)^2 - 1] - [2x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2x^2 + 4xh + 2h^2 - 1] - [2x^2 - 1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4x + 2h) = 4x\,.$$

TAI

$$\lim_{a\to x}\frac{f(a)-f(x)}{a-x}=\lim_{a\to x}\frac{[2a^2-1]-[2x^2-1]}{a-x}$$

$$=\lim_{a\to x}\frac{2(a^2-x^2)}{a-x}=\lim_{a\to x}\frac{2(a-x)(a+x)}{a-x}=\lim_{a\to x}(2a+2x)=4x\,.$$

Kohdassa $x=-3$ derivaatan arvoksi saadaan

$$f'(-3)=4\cdot(-3)=-12\,.$$

b) Ratkaisu:

$$x-\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}-\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\frac{x^2-3x-x^2+2x+3}{x-3}$$

$$=\frac{-x+3}{x-3}=\frac{-(x-3)}{x-3}=-1,\qquad x\neq 3$$

Pitää olla määrittelyehto mainittuna!

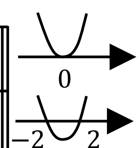
c) Epäyhtälö on määritelty, kun $x\neq\pm 2$. Muokataan epäyhtälö perusmuotoon.

$$\frac{8-x^2}{x^2-4}+2\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{8-x^2}{x^2-4}+\frac{2x^2-8}{x^2-4}\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{8-x^2+2x^2-8}{x^2-4}\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x^2}{x^2-4}\geq 0$$

Merkkikaavioksi saadaan

$-2\qquad 0\qquad 2$

x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	$-$	$-$	$+$
osam.	$+$	$-$	$-$	$+$



Nyt on huomioitava, että kohdat $x=-2$ ja $x=2$ ovat nimittäjän nollakohtia, joten ne eivät kuulu ratkaisujoukkoon, kun taas kohta $x=0$ kuuluu. Näin ollen vastaukseksi saadaan

$$x<-2,\qquad x=0,\qquad x>2\,.$$

B-osa: VASTAA TEHTÄVISTÄ 3 – 8 NELJÄÄN!

3. a) Anna esimerkki funktiosta, joka on kaikkialla jatkuva, mutta joka ei ole derivoituva kaikkialla.

b) Derivoi sekä tulon että osamäärän derivointisääntöjä käyttäen lauseke $\frac{x^2+1}{x^2}, x \neq 0$. Kirjoita välivaiheet näkyviin. (Miten saat osamäärän tuloksi eli nimittäjän osoittajaan...ainiin...)

c) Määritä se toisen asteen polynomi P, joka toteuttaa yhtälön

$$\boldsymbol{P(x) - P'(x) = x^2 - 4}$$

Vihje: Kirjoita ensin näkyviin yleinen toisen asteen polynomi.

a) Itseisarvofunktio $f\colon\ (x) = |x|$. Kyseessä on ns. piikki tai kiila kohta, jossa derivoituvuus katoaa.

b) Derivointi antaa:

$$D\frac{x^2+1}{x^2} = D(x^2+1) \cdot x^{-2} = 2x \cdot x^{-2} + (x^2+1) \cdot (-2)x^{-3}$$

$$= \frac{2x}{x^2} + \frac{-2x-2}{x^3} = \frac{2x^2-2x^2-2}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$D\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

c) Toisen asteen polynomi P on muotoa

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \text{missä } a, b, c \in \mathbb{R} \ \text{ ja } \ a \neq 0.$$

Näin ollen $P'(x) = 2ax + b$ ja saadaan yhtälö

$$P(x) - P'(x) = x^2 - 4$$

$$(ax^2 + bx + c) - (2ax + b) = x^2 - 4$$

$$ax^2 + (b - 2a)x + (c - b) = x^2 - 4,$$

josta edelleen kertoimia vertaillen saadaan kertoimet ratkaistua

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Ja toisen asteen polynomiksi tulee siis

$$P(x) = ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2\,.$$

4. Osoita *analyyttisesti perustellen*, että yhtälöllä

$$(x+1)^3 = x$$

on täsmälleen yksi reaalijuuri. Liitä kuvia/kuvaajia/yms. ratkaisusi tueksi.

Huom! Pelkkä laskinohjelman tulos tai kuvaaja antaa 0 pistettä. (5p)

b) Osoita (eli välivaiheet näkyviin), että

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2. \qquad (1\text{p})$$

a) Yhtälöä vastaa funktio $f\colon f(x) = (x+1)^3 - x = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, joka on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, erityisesti kaikilla aidoilla suljetuilla väleillä, aito: $[a, b] \subsetneq \mathbb{R}$.

Koska

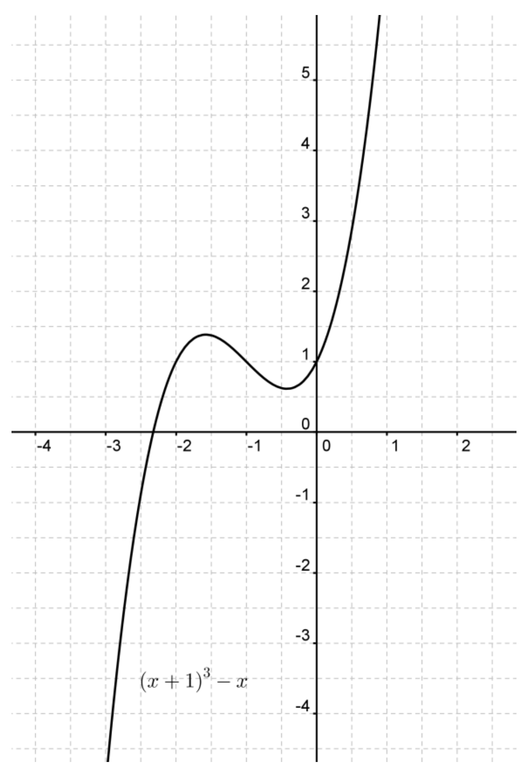
$$\begin{cases} f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 1 = -5 < 0 \\ f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 1 > 0 \end{cases}$$

niin Bolzanon lauseen nojalla funktiolla f on välillä $]-3, -2[$ **ainakin** yksi nollakohta.

Toisaalta koska $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$ ja

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \iff x = -1{,}577\ldots \text{ tai } x = -0{,}47226\ldots,$$

niin $f' > 0$ kaikilla $x < \frac{-3-\sqrt{3}}{3} = -1{,}577\ldots$ erityisesti välillä $]-3, -2[$. Tästä seuraa, että funktio f on aidosti monotoninen välillä $[-3, -2]$ ja näin ollen funktiolla f on **korkeintaan** yksi nollakohta avoimella välillä $]-3, -2[$.



Yhdistämällä tiedot saadaan, että funktiolla f on **täsmälleen** yksi nollakohta välillä $]-3, -2[$ ja alkuperäisellä yhtälöllä siten **täsmälleen** yksi reaalijuuri.

b) Rajankäyntiä varten havaitaan, että

$$x - 1 = \sqrt{x}^2 - 1^2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

Näin ollen:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1} + 1 = 2\,.$$

5. Olkoon f: $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{3}{5-x}$.

a) Mikä on funktion määrittelyjoukko?

b) Millä väleillä funktio f on kasvava ja millä väleillä vähenevä? Perustele analyyttisesti.

c) Määritä funktion paikalliset ääriarvot. Perustele analyyttisesti.

d) Piirrä funktion f ja derivaattafunktion f' kuvaajat samaan koordinaatistoon. Miten voit kuvaajista todeta kohtien a) ja b) tulokset?

e) Määritä raja-arvot laskien

$$\lim_{x\to 4} f(x), \qquad \lim_{x\to 4} f'(x)$$

a) $x \neq 0{,}5$ eli $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}\backslash\{0{,}5\}$

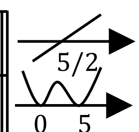
b) Funktio f on rationaalifunktiona jatkuva ja derivoituva määrittelyjoukossaan. Näin ollen

$$f'\!:\ f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{0\cdot(5-x) - 3\cdot(-1)}{(5-x)^2} = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{(5-x)^2}$$

$$= \frac{-3(5-x)^2 + 3x^2}{x^2\cdot(5-x)^2} = \frac{30x-75}{x^2\cdot(5-x)^2}$$

Kaaviot

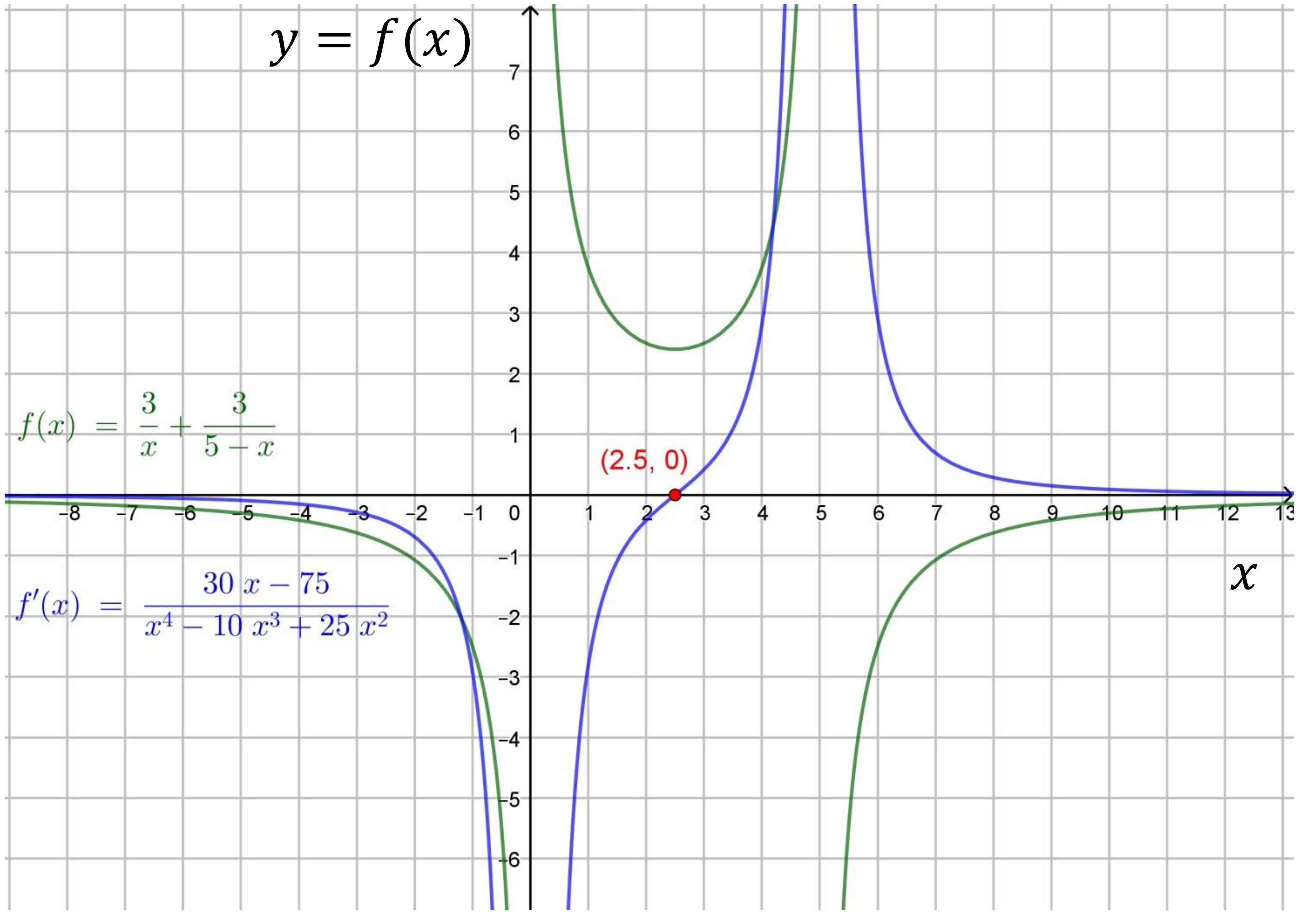
		0		5/2		5	
$30x-75$	$-$		$-$		$+$		$+$
$x^2\cdot(5-x)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
osam. $= f'(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	↘		↘	min	↗		↗



Siis, funktio f on kasvava, kun $\frac{5}{2} \leq x < 5$ ja $x > 5$ ja f on vähenevä, kun $0 < x \leq \frac{5}{2}$ ja $x < 0$.

c) Funktiolla f on lokaali minimi kohdassa $x = 5/2$ ja $f(5/2) = \frac{3}{5/2} + \frac{3}{5-5/2} = \frac{12}{5}$.

d) Geogebra. Derivaattakuvaajan nollakohta on funktion laakson pohja. Derivaatta saa negatiivisia arvoja kun funktio on vähenevä ja positiivisia kun kasvava. Katso myös kuvaajat.



e) Raja-arvoiksi saadaan

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{5-x}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{5-4} = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$$

$$\lim_{x\to 4} f'(x) = \lim_{x\to 4}\frac{30x-75}{x^2\cdot(5-x)^2} = \frac{30\cdot 4 - 75}{4^2\cdot(5-4)^2} = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$$

6. a) Määritä funktion $\boldsymbol{f: f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 6x - 1}$ suurin arvo välillä $\boldsymbol{]-\infty, 4]}$ ja pienin arvo välillä $\boldsymbol{[-1, \infty[}$. Muista perustella. Liitä $\boldsymbol{f}$:n kuvaaja järkevästi skaalattuna ratkaisusi mukaan.

b) Osoita derivointisääntö $\boldsymbol{D\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$.

Ohje: Aloita näin

$$\boldsymbol{D\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}} = \ \ldots$$

Mitä matemaatikot tykkäävät tehdä? Tee se osoittajaan ja...

a) Funktio $f: f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 6x - 1$ on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, koska on polynomifunktio.

Näin ollen suurin ja pienin arvo löytyvät derivaatan niistä 0-kohdista, jotka kuuluvat annetulle välille tai ko. välin suljetusta päätekohdasta. Derivointi antaa:

$$f': f'(x) = 6x^2 - 20x + 6 = 6(x - 1/3)(x - 3)$$

ja $f'(x) = 0$, kun $x = 1/3$ tai $x = 3$.

Kaaviot →

1/3 3

$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

max. min.

Kohdassa $x = 1/3$ on siis funktion f lokaali maksimi $f(1/3) = -\frac{1}{27}$ ja kohdassa $x = 3$ on siis f:n lokaali minimi $f(3) = -19$.

Nyt välille $]-\infty, 4]$ kuuluvat molemmat derivaatan 0-kohdat, joten lasketaan

$$f(4) = \ \dots\ = -9$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

koska f on kolmannen asteen polynomi x^3 termin kerroin posit. eli vas. alh → oik. ylös.

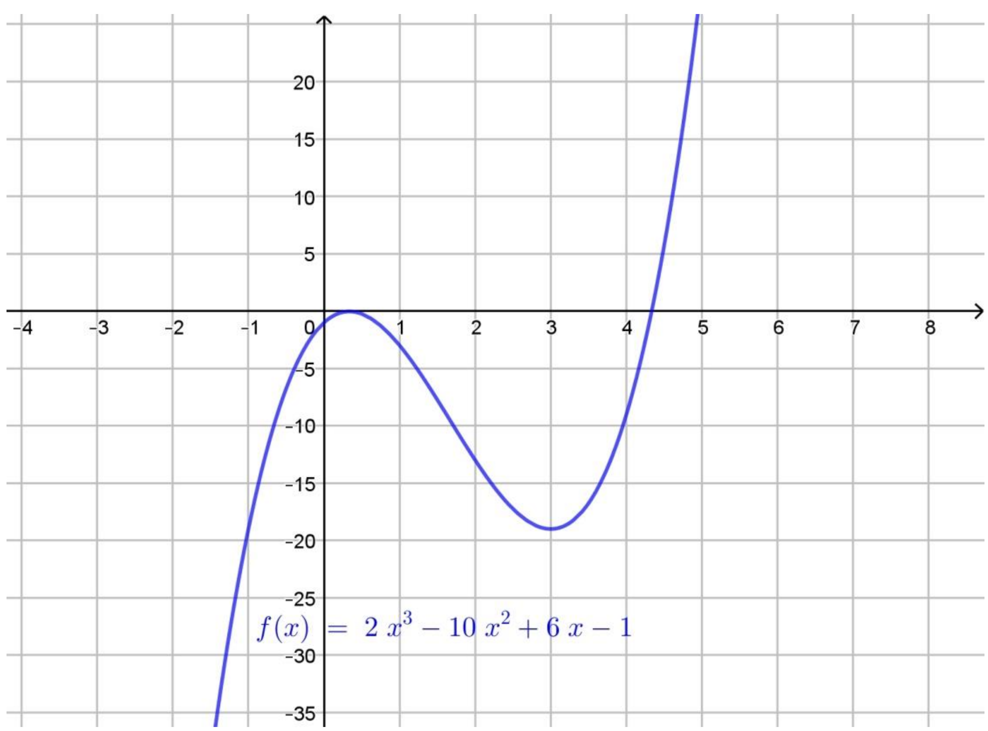
Siis f:llä ei ole pienintä arvoa ja suurin arvo on $-\frac{1}{27}$.

Edelleen välille $[-1, \infty[$ kuuluvat molemmat derivaatan 0-kohdat, joten lasketaan

$$f(-1) = \ \dots\ = -19$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

koska f on kolmannen asteen polynomi x^3 termin kerroin posit. eli vas. alh → oik. ylös. Siis f:llä ei ole suurinta arvoa ja pienin arvo on -19.



b) Ohjeen mukaisesti:

$$D\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

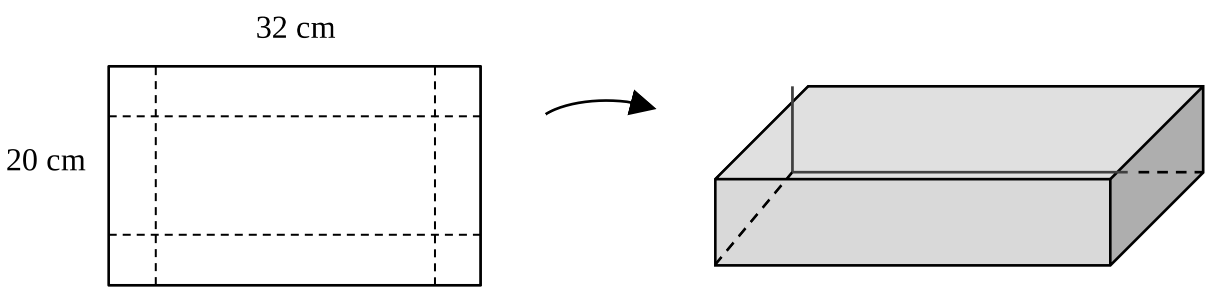
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)}\cdot g(x+h)+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}\cdot f(x)$$

$$= f'(x)\cdot g(x+0)+g'(x)\cdot f(x), \qquad \text{OK}$$

7. Suorakulmion muotoisen peltilevyn mitat ovat 20 cm ja 32 cm. Levyn nurkista leikataan pois keskenään yhtäsuuret neliön muotoiset palat ja levy taitetaan suorakulmaisen särmiön muotoiseksi laatikoksi (kanneton). Mikä on poistettavien neliöiden sivun oltava, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



Tilavuus saadaan yhtälöstä

$$V = \text{pituus}\cdot\text{leveys}\cdot\text{korkeus}.$$

Merkitään peltilevystä poistettavan neliön sivun pituutta x:llä. Tällöin laatikon leveys on $32\text{cm} - 2x$ ja vastaavasti laatikon pituus on $20\text{cm} - 2x$. Korkeus on x. Näin ollen laatikon tilavuus riippuu vain muuttujasta x, eli

$$V = V(x) = (20\text{cm} - 2x)\cdot(32\text{cm} - 2x)\cdot x = 4x^3 - 104x^2 + 640x$$

Selvästi pitää päteä

$$x > 0, \qquad x < 10, \qquad x < 16,$$

sillä jos $x = 0$, niin laatikolla ei ole korkeutta ja x ei voi saada negatiivisia arvoja. Toisaalta $x < 16$ cm ja $x < 10$ cm, joista jälkimmäinen on vahvempi ehto. Eli jos $x > 10$ cm, niin laatikon pohjan ala on nolla. On saatu suljettu väli $x \in [0,10]$ yksikkönä cm.

Tilavuusfunktio $V = V(x)$ on jatkuva ja derivoituva polynomifunktiona, joten se saa ääriarvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa mikäli ne osuvat tarkasteluvälille $[0,10]$.

$$\Rightarrow \quad V'(x) = 12x^2 - 208x + 640$$

ja $V'(x) = 0$, kun (laskin) $x = 4$ tai $x = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} > 10$ →hylätään. Ensimmäinen vaihtoehto $x = 4$ kuuluu tarkasteluvälille. Siis

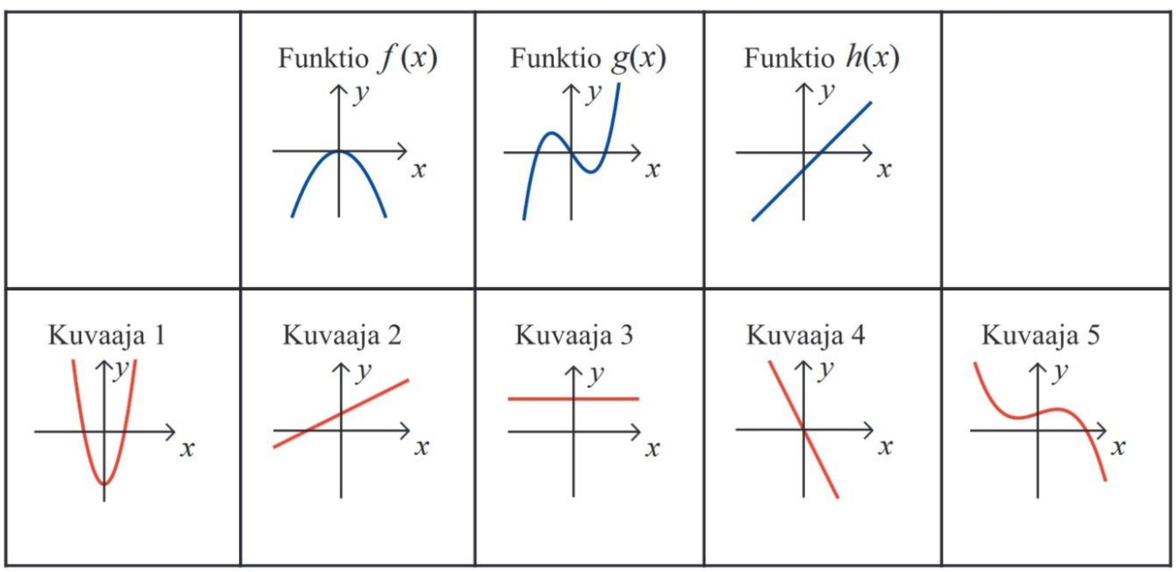
$$\begin{cases} V(0) = 4 \cdot 0^3 - 104 \cdot 0^2 + 640 \cdot 0 = 0 \\ V(4) = 4 \cdot 4^3 - 104 \cdot 4^2 + 640 \cdot 4 = 1152 \\ V(10) = 4 \cdot 10^3 - 104 \cdot 10^2 + 640 \cdot 10 = 0 \end{cases}$$

Muuttujan x arvolla 4 tilavuus $V(x)$ saavuttaa suurimman arvonsa.

VASTAUS: Neliön sivun pituuden tulee olla 4 cm.

8. a) Määritä *analyyttisesti perustellen* origosta paraabelille $y = x^2 - 2x + 4$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt. Määritä lisäksi tangenttien välinen terävä kulma. (5p)

b) Taulukon ylärivissä ovat funktioiden f, g ja h kuvaajat. Alemmassa rivissä on viiden eri funktion kuvaajat. Näiden joukossa ovat myös derivaattafunktioiden f', g' ja h' kuvaajat. Yhdistä funktio oikeaan derivaattafunktion kuvaajaan. Siis, esim. f − kuvaaja 1. (1p)



a) Tangenttien kulmakerroin kohdassa x on muotoa $y'(x) = 2x - 2$. Tangenttien toinen piste tunnetaan, se on origo, jota merkitään $(x_0, y_0) = (0,0)$. Suoran yhtälöä hyödyntäen saadaan

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 0 = (2x - 2)(x - 0)$$

$$y = 2x^2 - 2x$$

Pitää etsiä ne kohdat x, joissa suoran $y = 2x^2 - 2x$ ja paraabelin $y = x^2 - 2x + 4$ y-koordinaattien arvot ovat samat. (ÄLÄ hämäänny tässä vaiheessa suoran muodosta, jossa on siis toisen asteen termi → saadaan kaksi ratkaisua). Saadaan

$$y = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 4 = 2x^2 - 2x$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 0$$

Eli $x = 2$ tai $x = -2$.

Kun $\boldsymbol{x = 2}$, niin tangentin kulmakerroin on

$$k_1 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

ja tangentin yhtälöksi tulee

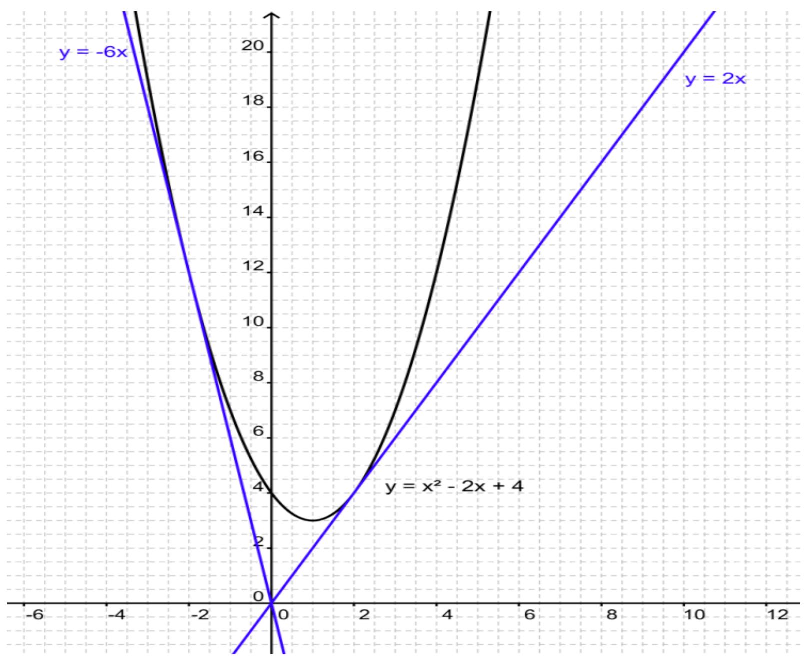
$$y - y_0 = 2(x - x_0)$$
$$y - 0 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$

Kun $\boldsymbol{x = -2}$, niin tangentin kulmakerroin on

$$k_1 = 2 \cdot (-2) - 2 = -6$$

ja tangentin yhtälöksi tulee

$$y - y_0 = -6(x - x_0)$$
$$y - 0 = -6(x - 0)$$
$$y = -6x$$



Määritetään lopuksi tangenttien välinen terävä kulma. Hyödynnetään yhtälöä

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

ja saadaan

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{2 - (-6)}{1 + 2 \cdot (-6)} \right| = \left| \frac{8}{1 - 12} \right| = \frac{8}{11} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36{,}027\ldots° \approx 36°.$$

b) VASTAUS: f − kuvaaja 4 $\quad$ g − kuvaaja 1 $\quad$ h − kuvaaja 3.