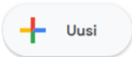
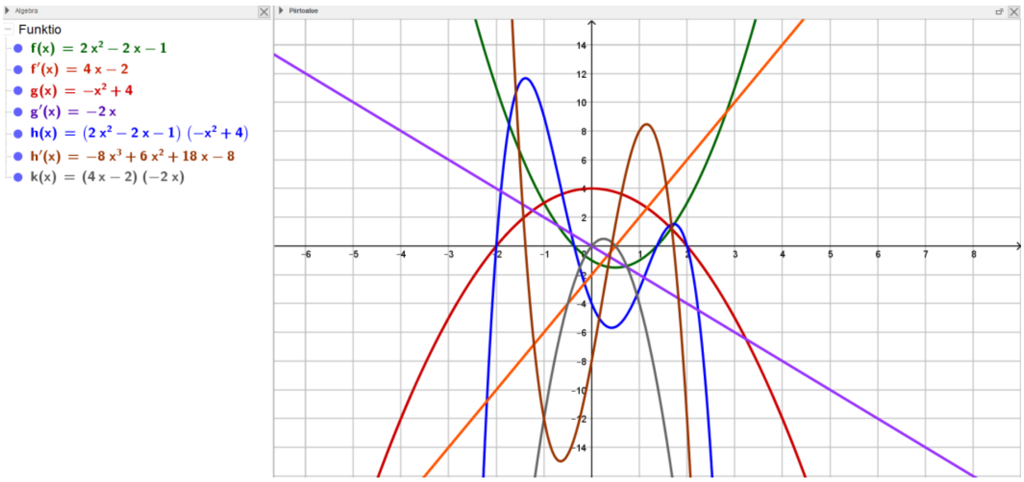

Tehtävien ratkaisut tulee olla tehtynä Googlen Docs-ohjelmalla. Liitä vastauksiisi kuvia Geogebrasta ja esim. TI-*n*spire ohjelmalla tuotettuja matemaattisia ratkaisuja.

→ Kirjaudu edu.sievi.fi - tunnuksellasi Google Driveen ja MAA4 -kansioon luo alikansio ”Tietokone-harjoitukset” kohdasta 

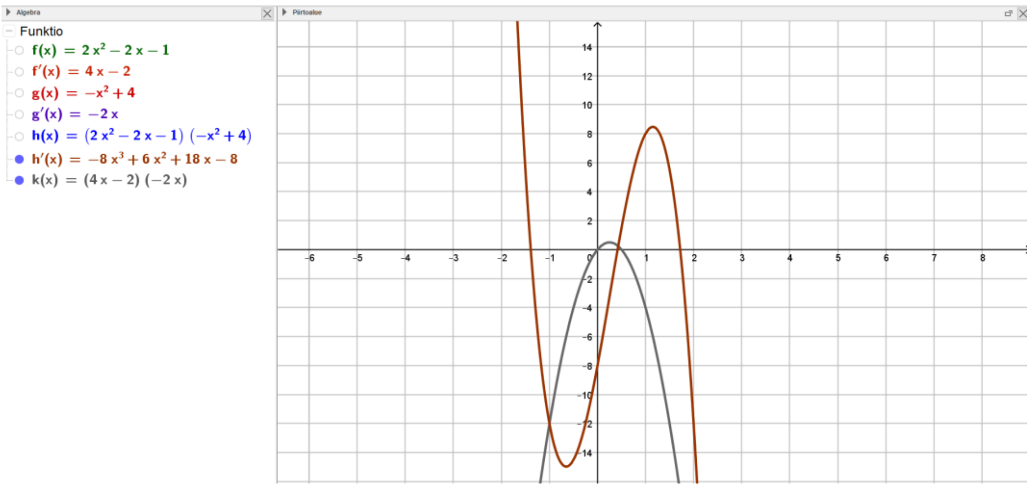
. Luo tähän kansioon Google Docs dokumentti, jonne kirjoitat/liität vastauksesi. Muista nimetä dokumentti omalla nimelläsi!

1. **a)** Osoitetaan GEOlla, että tulon derivaatta ei ole derivaattojen tulo. Kirjoita syöttökenttään seuraavat funktiot: $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ ja $g(x) = -x^2 + 4$. Muodosta f:n ja g:n tulofunktio: $h(x) = f(x)g(x)$. Seuraavaksi luo näiden funktioiden derivaatat komennolla `Derivaatta( <Funktio> )`. Siis `Derivaatta( f(x) )`, `Derivaatta( g(x) )` ja `Derivaatta( h(x) )`. Lopuksi luo f:n ja g:n derivaattojen tulofunktio k komennolla: $k(x) = f'(x)\ g'(x)$

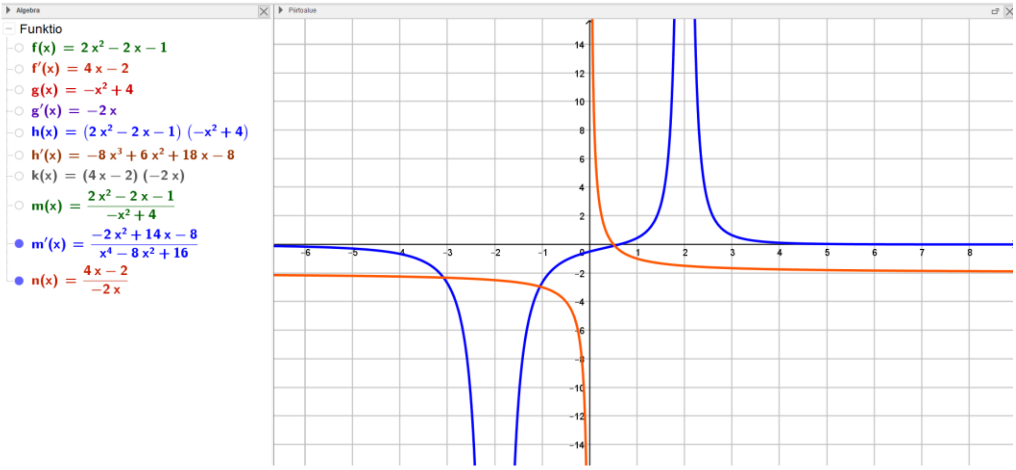
Tilanne tulisi näyttää kutakuinkin tältä (josta ei saa mitään selvää). Huomaa y-akselin skaalaus!



Valitse ALGEBRA-ikkunasta näkyviin vain funktiot h' ja k (eli klikkaa funktion nimen vasemman puoleinen sininen ympyrä pois päältä). Nyt saa paremmin selvää.



b) Osoitetaan GEOlla, että osamäärän derivaatta ei ole derivaattojen osamäärä. Käytä **a)**-kohdan GEO-tiedostoa. Luodaan aluksi osamääräfunktio m funktioista f ja g sekä sen derivaatta, (huomaa/palauta mileen rationaalisen funktion määrittelyehdot): `m(x) = f(x)/g(x)` ja `Derivaatta(m(x))`. Lopuksi luodaan f:n ja g:n derivaatoista osamääräfunktio `n(x) = f'(x) / g'(x)` ja valitaan tarkasteltavat funktiot m' ja n esiin. Tehdään havainnot.



2. Tarkastellaan derivaatan hyödyntämistä MAA4:lta tutuksi tulleisiin kulmakaavoihin $\tan(\alpha) = k$ ja $\tan(\alpha) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

a) Määritä missä kulmassa käyrät $y_1 = f(x) = \cos(2x)$ ja $y_2 = g(x) = \log_{0.5}(3x - 1)$ leikkaavat toisensa.

b) Määritä millä parametrin a arvo(i)lla käyrälle $y_3 = h(x) = 10\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot 2^{a \cdot x}$ kohtaan $x = 1$ asetettu tangentti leikkaa x-akselin 20 asteen kulmassa.

Tehdään molemmat alakohdat ensin TI:llä (radiaanit saa olla asetuksena) ja sitten GEO:lla.

a) Laskin-välilehdellä luodaan funktiot muistiin := -komennolla sekä ratkaistaan funktioiden leikkauspiste $x = x_0$. Huomautuksesta ei tarvi välittää (keltainen kolmio.)

$f(x):=\cos(2\cdot x)$	*Valmis*
$g(x):=\log_{0.5}(3\cdot x-1)$	*Valmis*
⚠ $\text{solve}(f(x)=g(x),x)$	$x=0.588981094$

Ratkaistaan seuraavaksi funktioiden derivaattojen arvot kyseisellä $x = x_0$ arvolla. Lasketaan ensin funktion f derivaatan arvo. Muista: derivoinnin jälkeen pystyviiva (Alt Gr + ) ja sitten paina kerran nuoliylöspäin, edellisen laskun tulos tulee valituksi (tulee siniseksi) ja paina ENTER.

⚠ $\text{solve}(f(x)=g(x),x)$	$x=0.588981094$
$\frac{d}{dx}(f(x))\vert$	

Tilanne tulisi olla lopulta seuraavanlainen.

$\frac{d}{dx}(f(x))|x=0.58898109398343$ $\quad$ $^{-}1.84765568$

Sitten funktion g derivaatan arvo. Saat tämän vastaavalla tavalla helposti, kun ensin nuoliylöspäin kahdesti → valituksi tulee edellinen lasku. Paina ENTER ja vaihda funktio f:stä g:ksi.

$\frac{d}{dx}(g(x))|x=0.58898109398343$ $\quad$ $^{-}5.643292307$

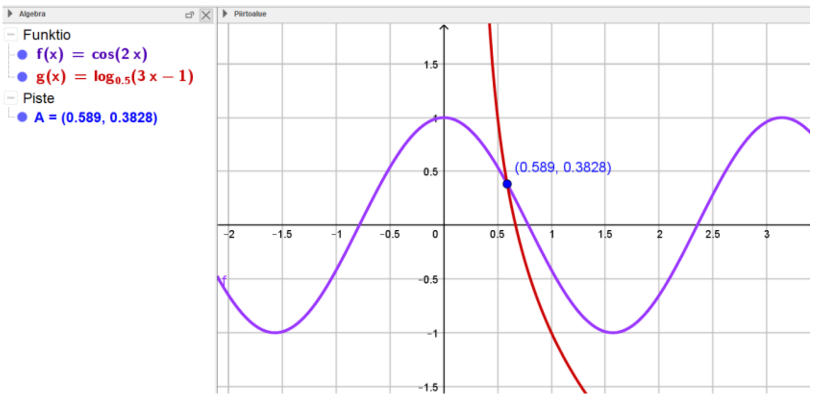
Lopuksi lasketaan kulman arvo, muista itseisarvot ja arctan-komento. Voit valita vapaasti kumman derivaatan arvo on k_1 ja kumman k_2. Radiaanit saat asteeksi tutulla muunnoksella.

$$\left|\frac{^{-}1.8476556799193-^{-}5.64329230665}{1+^{-}1.8476556799193\cdot {}^{-}5.64329230665}\right| \quad 0.3321679155$$

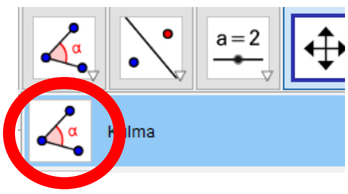
$$\tan^{-1}(0.33216791548318) \quad 0.3207013119$$

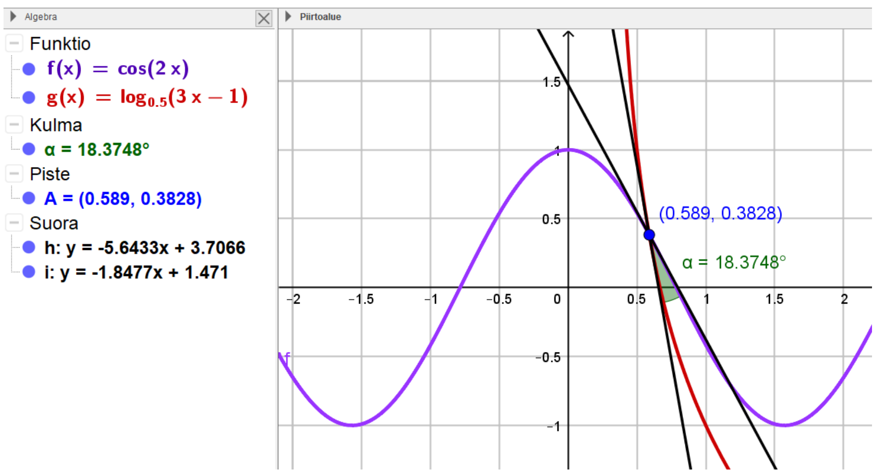
$$\frac{0.32070131187462\cdot 180}{\pi} \quad 18.37483165$$

GEOlla piirretään aluksi funktioiden kuvaajat sekä määritetään niiden leikkauspiste:



Seuraavaksi luodaan tangentit ja määritetään tangenttien välinen kulma suoraan Kulma-komennolla (riittää valita suorat, ei tarvitse luoda mitään apupisteitä). Mikäli saat ”väärän kulman”, niin valitse suorat toisessa järjestyksessä. Eli tangenttien leikkauspisteeseen muodostuu kaksi suoraa, niistä pienempi tulee valita (on määritelmän mukaan suorien leikkauskulma).





b) Laskin-välilehdellä luodaan funktio h muistiin := -komennolla. Derivoidaan funktio h ja lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 1$.

$$h(x):=10\cdot \sin\left(\frac{1}{3}\cdot x\right)\cdot 2^{a\cdot x} \qquad \textit{Valmis}$$

$$\frac{d}{dx}(h(x))|x=1 \qquad \left(10\cdot a\cdot \ln(2)\cdot \sin\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{10\cdot \cos\left(\frac{1}{3}\right)}{3}\right)\cdot 2^{a}$$

Lopuksi ratkaistaan millä parametrin a arvolla derivaatan arvo (kohdassa $x = 1$) on $\pi/9$. Huomaa, että 20 asteen ($\pi/9$) kulma mudostuu myös ns. negatiiviseen kiertosuuntaan! Siksi kaksi yhtälöä (jotka voisi itseisarvolla saada suoraan kuntoon).

$$\text{solve}\left(\tan^{-1}\left(\left(10\cdot a\cdot \ln(2)\cdot \sin\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{10\cdot \cos\left(\frac{1}{3}\right)}{3}\right)\cdot 2^{a}\right)=\frac{\pi}{9},a\right)$$

$$a=^{-}1.055340718$$

$$\text{solve}\left(\tan^{-1}\left(\left(10\cdot a\cdot \ln(2)\cdot \sin\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{10\cdot \cos\left(\frac{1}{3}\right)}{3}\right)\cdot 2^{a}\right)=\frac{^{-}\pi}{9},a\right)$$

$$a=^{-}4.053347886 \text{ or } a=^{-}2.056388976$$

TAI itseisarvolla

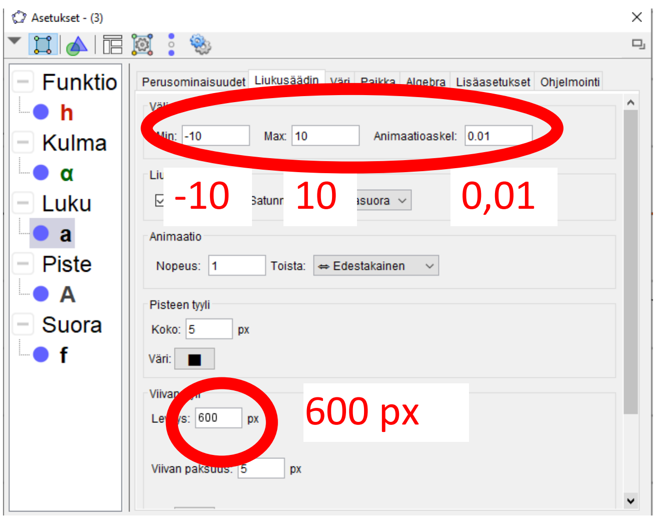
$$\text{solve}\left(\left|\tan^{-1}\left(\left(10\cdot a\cdot \ln(2)\cdot \sin\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{10\cdot \cos\left(\frac{1}{3}\right)}{3}\right)\cdot 2^{a}\right)\right|=\frac{\pi}{9},a\right)$$

$$a=^{-}4.053347886 \text{ or } a=^{-}2.056388976 \text{ or } a=^{-}1.055340718$$

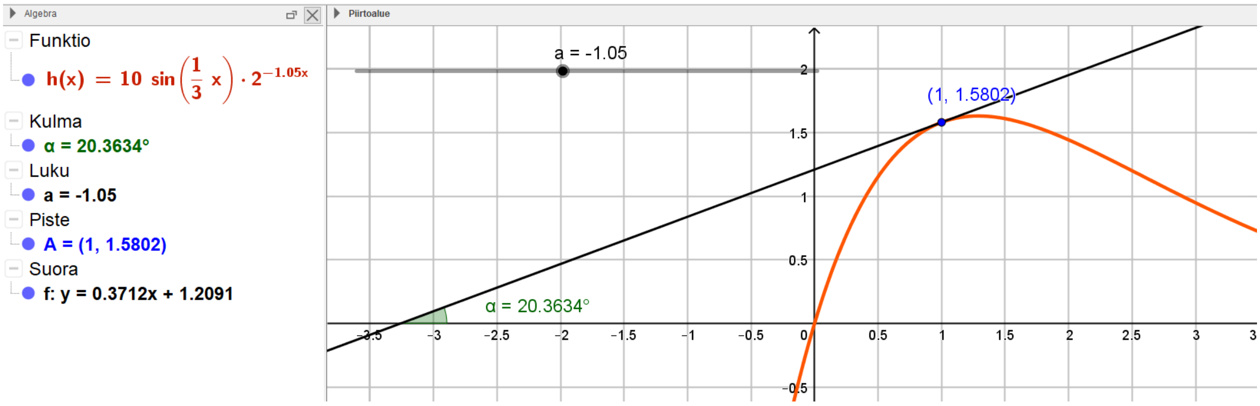
GEOlla piirretään aluksi funktion h kuvaaja (muista kertomerkki parametrin a ja muuttujan x väliin).

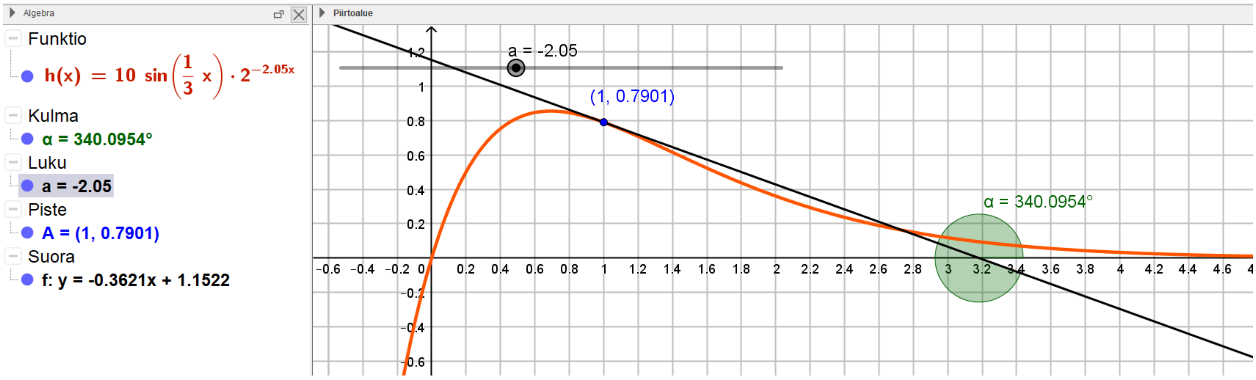
```
h(x) = 10*sin(1 / 3*x) * 2^(a*x).
```

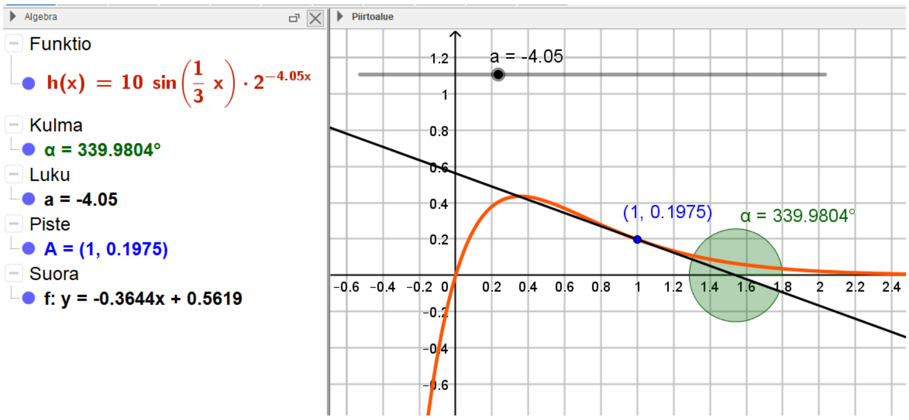
Luodaan liukusäätimet ja liukusäätimen asetuksista seuraavat muutokset:



Luodaan piste `A=(1,h(1))`. Luodaan pisteen A kautta tangentti ja lopuksi tangentin ja x-akselin välinen kulma. Vaihdellaan, liukukytkimen kautta, parametrin a arvoa ja havaitaan, että arvoilla $-1{,}05$, $-2{,}05$ ja $-4{,}05$ tangentti leikkaa x-akselin 20 asteen kulmassa.







3. Sovellustehtävä…ehkä ei.? mieti?

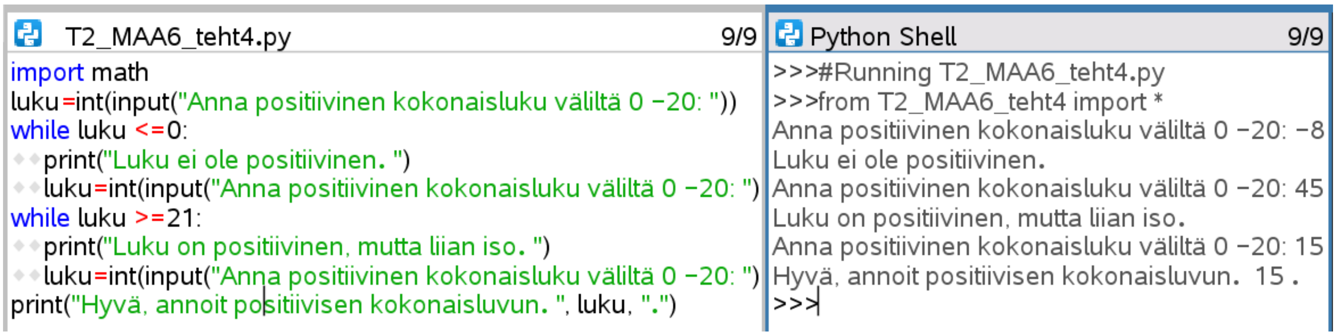
4. Jatketaan PYTHON-ohjelmoinnin perusteita ja tarkastellaan while- sekä for- silmukkarakenteita. Muodostetaan ensin helpohko while -silmukka ja sitten kohtuu yksinkertaisen funktion erotusosamääriä käyttäjän määrittämässä kohdassa $x = x_0$ for-silmukalla. Silmukkarakenteissa muista kaksoispiste ehdon jälkeen, jolloin python itse sisentää suoritettavat komennot.

a) Avaa TI:ssä Python editori, jaa näyttö ja avaa komentotulkki (Shell). Kirjoitetaan ohjelma:

```
import math
```

```
luku=int(input("Anna positiivinen kokonaisluku väliltä 0 -20: "))
while luku <=0:
  print("Luku ei ole positiivinen. ")
  luku=int(input("Anna positiivinen kokonaisluku väliltä 0 -20: "))
while luku >=21:
  print("Luku on positiivinen, mutta liian iso. ")
  luku=int(input("Anna positiivinen kokonaisluku väliltä 0 -20: "))
print("Hyvä, annoit positiivisen kokonaisluvun. ", luku, ".")
```

Muista painaa syöttämäsi luvun jälkeen ENTER:iä. Tulisi olla suunnilleen seuraavaa:

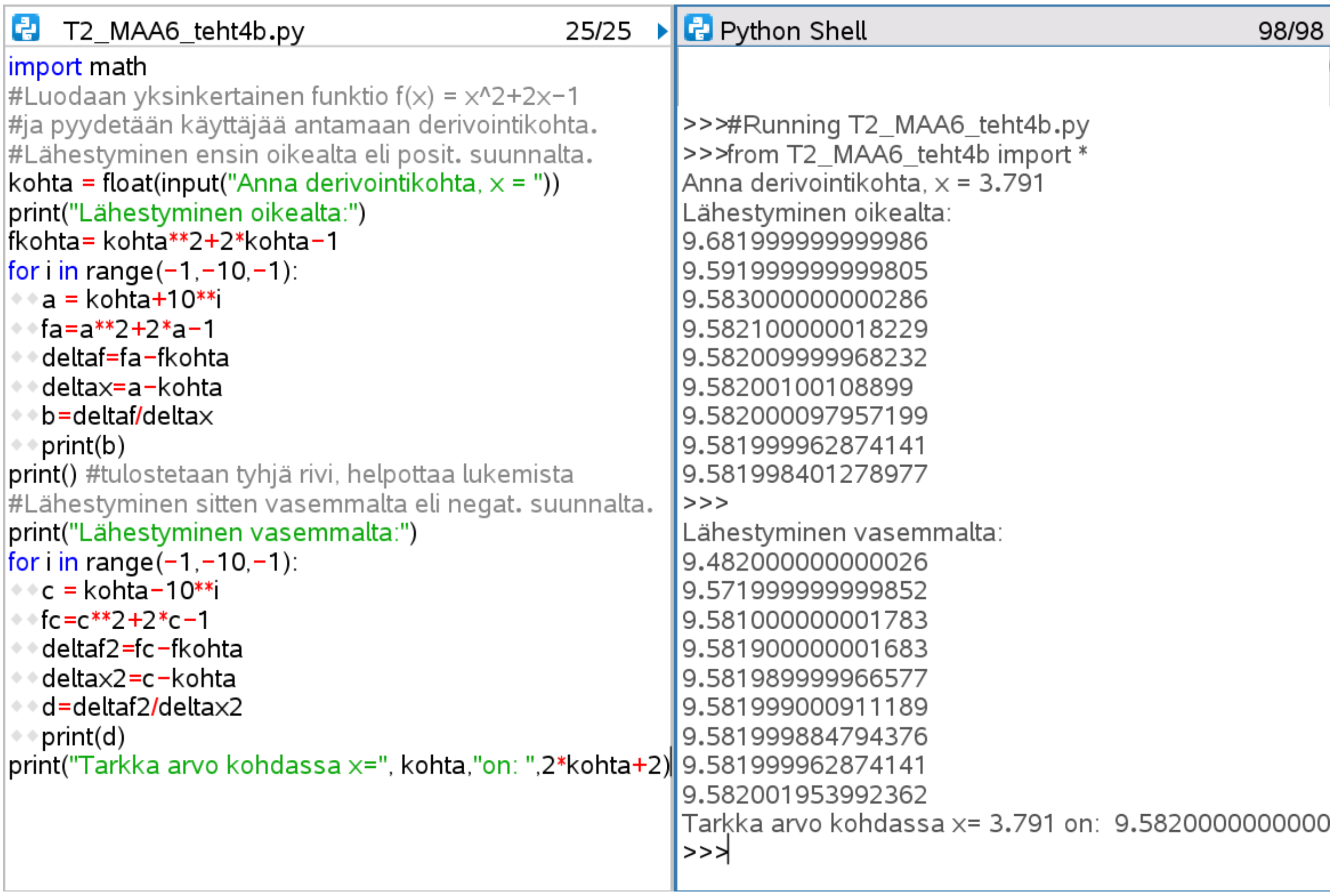


b) Kirjoitetaan toinen ohjelma, jossa lasketaan erotusosamääriä, mutta käyttäen nyt float-tyyppistä lukua eli desimaalilukua. Lasketaan erotusosamääriä funktiolle: $x^2 + 2x - 1$

For -silmukassa toistojen lukumäärä tiedetään etukäteen.

```
import math
#Luodaan yksinkertainen funktio f(x) = x^2+2x-1
#ja pyydetään käyttäjää antamaan derivointikohta.
#Lähestyminen ensin oikealta eli posit. suunnalta.
kohta = float(input("Anna derivointikohta, x = "))
print("Lähestyminen oikealta:")
fkohta= kohta**2+2*kohta-1
for i in range(-1,-10,-1):
  a = kohta+10**i
  fa=a**2+2*a-1
  deltaf=fa-fkohta
  deltax=a-kohta
```

```
  b=deltaf/deltax
  print(b)
print() #tulostetaan tyhjä rivi, helpottaa lukemista
#Lähestyminen sitten vasemmalta eli negat. suunnalta.
print("Lähestyminen vasemmalta:")
for i in range(-1,-10,-1):
  c = kohta-10**i
  fc=c**2+2*c-1
  deltaf2=fc-fkohta
  deltax2=c-kohta
  d=deltaf2/deltax2
  print(d)
print("Tarkka arvo kohdassa x=", kohta,"on: ",2*kohta+2)
```



c) Joskus voi käydä niin, että joudutaan menemään hyvin hyvin lähelle tarkastelukohtaa, ennen kuin erotusosamäärät alkavat olla riittävän tarkkoja derivaatan arvolle.

Tarkastellaan funktiota $f: f(x) = \frac{\sin(10\,000 \cdot x)}{100}$, jolle derivaatta on $f': f'(x) = 100 \cdot \cos(10\,000x)$ ja otetaan tarkastelukohdaksi $x = 0$. Tällöin siis $f'(0) = 100$. Muodosta ohjelma joka laskee oikeanpuoleisia erotusosamääriä sekä erotusosamäärien absoluuttiset virheet sekä suhteelliset virheet. Huomaa, että esimerkkiin on tulostettu tyhjiä rivejä luettavuuden parantamiseksi.

```
import math
#Ilmoitetaan tarkastelukohta, funktio ja derivaatan
#tarkka arvo tarkastelukohdassa.
kohta = 0
print("Tarkastelukohta: ", kohta,".")
print("Funktio f(x)=sin(10000x)/100.")
derivarvo = 100
print("Derivaatan tarkka arvo kohdassa x=0: ", derivarvo,".")
fkohta= math.sin(10000*kohta)/100
print("Funktion f arvo kohdassa x=0: ", fkohta,".")
print()#tyhjä rivi luettavuuden parantamiseksi
for i in range(-1,-15,-1):
  a = kohta+10**i
  fa=math.sin(10000*a)/100
  deltaf=fa-fkohta
  deltax=a-kohta
  b=deltaf/deltax
  print("Erotusosamäärä, kun muutos on: ",10**i)
  print(b)
  print("Absoluuttinen virhe:")
  print(abs(b-derivarvo))
  print("Suhteellinen virhe:")
  print(abs((b-derivarvo)/derivarvo))
  print()# tyhjä rivi luettavuuden parantamiseksi
print("Ohjelma päättyy.")
```

T2_MAA6_teht4c.py 24/25

```python
import math
#Ilmoitetaan tarkastelukohta, funktio ja derivaatan
#tarkka arvo tarkastelukohdassa.
kohta = 0
print("Tarkastelukohta: ", kohta,".")
print("Funktio f(x)=sin(10000x)/100.")
derivarvo = 100
print("Derivaatan tarkka arvo kohdassa x=0: ", derivarvo,".")
fkohta= math.sin(10000*kohta)/100
print("Funktion f arvo kohdassa x=0: ", fkohta,".")
print()#tyhjä rivi luettavuuden parantamiseksi
for i in range(-1,-15,-1):
    a = kohta+10**i
    fa=math.sin(10000*a)/100
    deltaf=fa-fkohta
    deltax=a-kohta
    b=deltaf/deltax
    print("Erotusosamäärä, kun muutos on: ",10**i)
    print(b)
    print("Absoluuttinen virhe:")
    print(abs(b-derivarvo))
    print("Suhteellinen virhe:")
    print(abs((b-derivarvo)/derivarvo))
    print()# tyhjä rivi luettavuuden parantamiseksi
print("Ohjelma päättyy.")
```

Python Shell 380/457

```
Tarkastelukohta:  0 .
Funktio f(x)=sin(10000x)/100.
Derivaatan tarkka arvo kohdassa x=0:  100 .
Funktion f arvo kohdassa x=0:  0.0 .
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  0.1
0.08268795405320024
Absoluuttinen virhe:
99.9173120459468
Suhteellinen virhe:
0.999173120459468
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  0.01
-0.5063656411097588
Absoluuttinen virhe:
100.5063656411098
Suhteellinen virhe:
1.005063656411098
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  0.001
-5.440211108893697
Absoluuttinen virhe:
105.4402111088937
Suhteellinen virhe:
1.054402111088937
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  0.0001
84.14709848078965
```

Python Shell 413/457

```
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-05
99.83341664682815
Absoluuttinen virhe:
0.166583353171859
Suhteellinen virhe:
0.00166583353171859
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-06
99.99833334166667
Absoluuttinen virhe:
0.001666658333348892
Suhteellinen virhe:
1.666658333348892e-05
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-07
99.99998333333417
Absoluuttinen virhe:
1.666666582877951e-05
Suhteellinen virhe:
1.666666582877951e-07
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-08
99.99999983333336
Absoluuttinen virhe:
1.666666520350191e-07
Suhteellinen virhe:
1.666666520350191e-09
>>>
```

Python Shell 440/457

```
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-09
99.99999999833335
Absoluuttinen virhe:
1.666663251853606e-09
Suhteellinen virhe:
1.666663251853606e-11
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-10
99.99999999998332
Absoluuttinen virhe:
1.668354343564715e-11
Suhteellinen virhe:
1.668354343564715e-13
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-11
99.99999999999984
Absoluuttinen virhe:
1.70530256582424e-13
Suhteellinen virhe:
1.70530256582424e-15
>>>
Erotusosamäärä, kun muutos on:  1e-12
100.0
Absoluuttinen virhe:
0.0
Suhteellinen virhe:
0.0
```

Tallenna *omanimi_sukunimi* -muodossa pedan tallennuskansioon palautuspäivään mennessä.