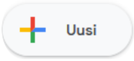
Tehtävien ratkaisut tulee olla tehtynä Googlen Docs-ohjelmalla. Liitä vastauksiisi kuvia Geogebrasta ja esim. TI-*n*spire ohjelmalla tuotettuja matemaattisia ratkaisuja.

→ Kirjaudu edu.sievi.fi - tunnuksellasi Google Driveen ja MAA4 -kansioon luo alikansio "Tietokone-harjoitukset" kohdasta 

. Luo tähän kansioon Google Docs dokumentti, jonne kirjoitat/liität vastauksesi. Muista nimetä dokumentti omalla nimelläsi!

1. a) Laajennetaan hieman raja-arvon käsitettä sekä harjoitellaan asymptoottien määrittämistä. Asymptoottihan oli sellainen rajasuora tai rajakäyrä, jota funktion kuvaaja lähestyy, kun muuttuja lähestyy $\pm\infty$ tai niitä kohtia, joissa funktiota ei ole määritelty.

a) Piirrä funktion $\boldsymbol{f : f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}}$ kuvaaja GEOlla. Piirrä myös katkoviivalla suora $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}}$. Mitä havaitset? Kun x *vähenee rajatta* ts. $x \to -\infty$, niin "Selvästi" f:n arvot lähestyvät arvoa $\frac{2}{3}$. Sanotaan, että f:llä on *miinus äärettömyydessä raja-arvo* $\frac{2}{3}$. Tätä merkitään

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Vastaavasti, kun $x \to \infty$, eli kun x *kasvaa rajatta*, niin f:n arvot lähestyvät jälleen arvoa $\frac{2}{3}$. f:llä on *plus äärettömyydessä raja-arvo* 0, merkitään

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right) = \frac{2}{3}.$$

TI:llä voidaan laskea useita arvoa kerralla käyttäen kaarisulkuja ja arvot pilkulla erotettuina, siis esim. edellä käydyn funktion lähestyminen kohti miinus ääretöntä (havaitaan arvo 2/3 "pienillä" x):

$$\frac{2\cdot\{-10,-100,-10000,-1000000000.\}-1}{3\cdot\{-10,-100,-10000,-1000000000.\}+2}$$
$$\{0.75,0.674496644295,0.66674444963,0.666666667444\}$$

Ja vastaavasti lähestyminen kohti plus ääretöntä (havaitaan arvo 2/3 "suurilla" x):

$$\frac{2\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}-1}{3\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}+2}$$
$$\{0.59375,0.658940397351,0.666588894074,0.666666665889\}$$

Yleisesti, jos osoittajan ja nimittäjän asteet ovat samat, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on korkeimman asteen termien kerrointen osamäärä. Asymptoottina on suora $y =$ vakio. → Laske ja piirrä kuvaaja sekä asymptootti

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right), \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-6x}{3x+2}$$

b) Entäpä, jos nimittäjän aste on isompi kuin osoittajan? Tarkastele seuraavaa esimerkkiä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{15x+5}{4x^2+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(15+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{15+\frac{5}{x}}{4+\frac{2}{x^2}}=0\cdot\frac{15}{4}=0\,.$$

Laskennallisesti, lähestyminen kohti plus ääretöntä (havaitaan arvo 0 ”suurilla” x):

$$\frac{15\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}+5}{4\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}^2+2}$$
$$\{0.3855721393,0.0376231188,0.0003750125,0.0000000038\}$$

Yleisesti, jos osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän aste, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on nolla. Asymptoottina on suora $y = 0$ eli x-akseli.

→ Laske ja piirrä kuvaaja sekä asymptootti

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-15x}{3x^2-2}$$

c) Kun osoittajan aste on suurempi kuin nimittäjän, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on $+\infty$ tai $-\infty$. Eivät välttämättä ole samoja, esimerkiksi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x}}="\infty"\cdot\frac{3}{2}="\infty",.$$

ja toisaalta

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^2+5x}=\ldots="-\infty"\cdot\frac{3}{2}="-\infty".$$

$$\frac{3\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}^3+\{10,100,10000,1000000000.\}^2-1}{2\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}^2+5\cdot\{10,100,10000,1000000000.\}}$$
$$\{12.396,146.8292195,14996.75081,1499999997.\}$$

$$\frac{3\cdot\{-10,-100,-10000,-1000000000.\}^3+\{-10,-100,-10000,-1000000000.\}^2-1}{2\cdot\{-10,-100,-10000,-1000000000.\}^2+5\cdot\{-10,-100,-10000,-1000000000.\}}$$
$$\{-19.34,-153.3333846,-15003.25081,-1500000003.\}$$

Piirrä käyrä ja totea edellä eri raja-arvot.

2. 2-tehtävässä tarkastellaan lähestymistä niitä kohtia, joissa funktiota ei ole määritelty. Tarkastellaan funktiota $f: f(x) = \frac{1}{x-2}$ ja piirretään funktion f kuvaaja eli käyrä $y = \frac{1}{x-2}$.

Nyt, kun $x \to 2-$, niin funktion f arvot näyttävät vähenevän rajatta. Vastaavasti, kun $x \to 2+$, niin f:n arvot näyttävät kasvavan rajatta.

Sanotaan, että funktiolla f on kohdassa $x = 2$ (epäoleellinen) vasemmanpuoleinen raja-arvo $-\infty$ ja vast. (epäoleellinen) oikeanpuoleinen raja-arvo $+\infty$. Käyrä $y = \frac{1}{x-2}$ lähenee suoraa $x = 2$ sitä saavuttamatta.

Sanotaan, että käyrällä on pystysuorana asymptoottina suora $x = 2$.

→ Laske, piirrä kuvaaja sekä pystysuorat asymptootit (osaatko mahdolliset muut asymptootit määrittää?)

i) $\lim_{x\to 2-} \frac{x-1}{x^2-4}$, $\lim_{x\to 2+} \frac{x-1}{x^2-4}$, $\lim_{x\to -2-} \frac{x-1}{x^2-4}$, $\lim_{x\to -2+} \frac{x-1}{x^2-4}$.

ii) $\lim_{x\to 2-} \frac{x-1}{2-x}$, $\lim_{x\to 2+} \frac{x-1}{2-x}$

Yhteenvetoa – asymptoottien määrittäminen

Rationaalifunktion kuvaajalla on

- *pystysuora asymptootti* $x = x_0$ nimittäjän niissä nollakohdissa, jois-sa osoittaja $\neq 0$,
- *vaakasuora asymptootti* $y = 0$ eli x-akseli, jos osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän,
- *vaakasuora asymptootti* $y = y_0$ $(\neq 0)$ eli x-akselin suuntainen suora, jos osoittajan ja nimittäjän asteet ovat samat,
- *vino suoraviivainen asymptootti* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, jos osoit. aste on yhtä suurempi kuin nimit.,
- *vino käyräviivainen asymptootti* $y = f(x)$, jos osoit. aste on väh. kahta suurempi kuin nimittäjän.

3. Viimeinen raja-arvotehtävä liittyy funktioon $f: f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Mitä f:n arvot lähestyvät, kun $x \to 0$?

Piirrä GEOlla funktion *f* kuvaaja ja huomaat tilanteen.

Laske sitten funktion f arvoja $f(x_n)$, kun $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Nyt siis

$$x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1\cdot 2\pi} \approx 0{,}1273, \qquad x_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi} \approx 0{,}0707, \qquad x_3 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+3\cdot 2\pi} \approx 0{,}0490, \qquad \to 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\{2,4,6,8,10,100,10000\}\cdot\pi}}\right) \qquad \{1,1,1,1,1,1,1\}$$

Voit havainnollistaa näitä edellä piirtämääsi kuvaajaan GEOssa jono-komennolla:

```
Jono((1 / (π / 2 + n * 2π), f(1 / (π / 2 + n * 2π))), n, 1, 20, 1)
```

Laske sitten funktion f arvoja $f(x_n)$, kun $x_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Nyt siis

$$x_1 = \frac{1}{1\pi} \approx 0{,}3183, \qquad x_2 = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}1592, \qquad x_3 = \frac{1}{3\pi} \approx 0{,}1061, \qquad \to 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\{1,2,3,4,10,100,10000\}\cdot\pi}}\right) \qquad \{0,0,0,0,0,0,0\}$$

Voit jälleen havainnollistaa näitä edellä piirtämääsi kuvaajaan GEOssa jono-komennolla:

```
Jono((1 / (n * π), f(1 / (n * π))), n, 1, 20, 1)
```

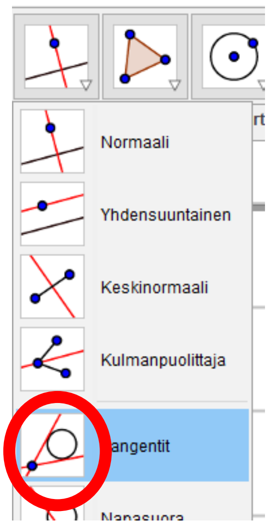
Mitä huomaat? Voidaanko raja-arvo nollassa määrittää?

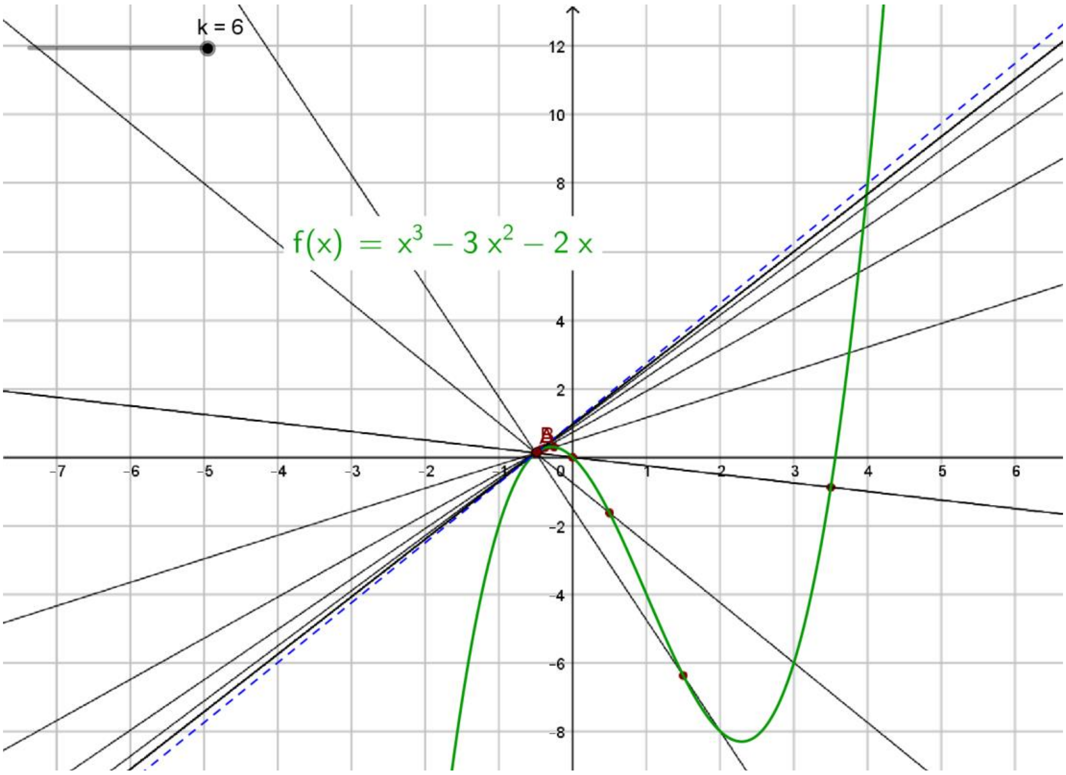
4. Tarkastellaan vielä lopuksi derivaatan määritelmää. Kirjoita Geogebran syöttökenttään polynomifunktio `f(x)=x^3-3x^2-2x` sekä pisteet eli `A=(-0.5, f(-0.5))` ja `B=(-0.5+2^(-k), f(-0.5+2^(-k)))`. Geogebra kysyy, luodaanko liukusäätimet → Luodaan. Aseta liukusäätimen asetukset seuraavasti: alaraja -2, yläraja 6 ja animaatioaskel 1. Kokeile miten piste B liikkuu funktion kuvaajalla. Piirrä sitten suora pisteiden A ja B kautta. Aseta sekä suoran että pisteen B jälki käyttöön (eli algebraikkunassa paina suoran/pisteen B kohdalla hiiren kakkospainiketta ja valitse jälki käyttöön.) Lopuksi vie liukusäädin arvoon -2, paina CTRL+F ja sitten liikuta liukusäädintä arvoon 6. Tee havaintoja.

Pohdi erotusosamäärän raja-arvoa, sekantteja ja lopuksi piirrä tangentti pisteeseen A. Eli valitse tangentti (katso kuva), paina piste A ja sitten funktion f kuvaajaa. Hyödynnä värejä!

Liitä lopuksi näyttökuva, jossa näkyy funktio, sekantit ja tangentti, vastaukseesi.

Tulisi näyttää tältä.





Tallenna *omanimi_sukunimi* -muodossa pedan tallennuskansioon palautuspäivään mennessä.