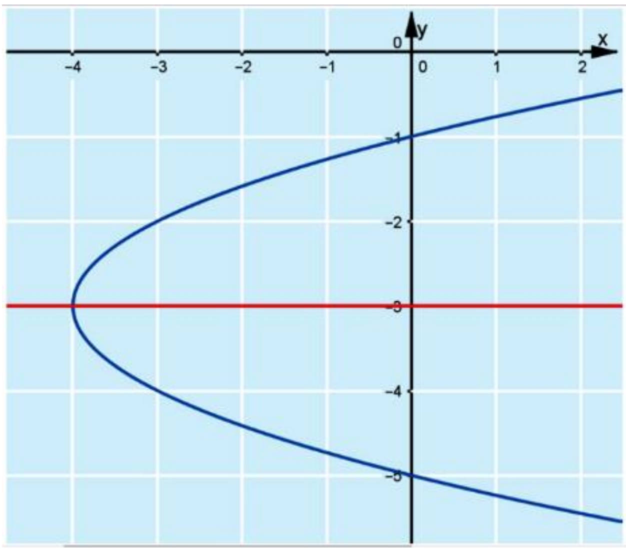
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN! MAOL ON SALLITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

1. **a)** Mihin suuntaan kuvan paraabeli aukeaa? Määritä paraabelin huippupiste ja symmetria-akseli. **(1p)**



b) Määritä suoran $x + y = 2$ ja paraabelin $y = x^2 - 4x + 2$ yhteiset pisteet. Selitä lisäksi kuinka saisit paraabelin huipun koordinaatit selville paraabelin ja x-akselin leikkauspisteiden avulla. **(2p)**

c) Pallo potkaistaan maan pinnalta ilmaan ja se lentää paraabelin muotoista rataa 40,0 metrin päähän. Määritä pallon radan yhtälö, kun pallo käy 7 metrin korkeudella ja koordinaatiston origo on pallon lähtökohdassa. **(3p)**

a) Aukeamissuunta OIKEA, huippupiste $(-4, -3)$ ja symmetria-akseli $y = -3$.

b) Muodostetaan yhtälöpari, jonk ratkaisuna saadaan kysytyt pisteet TAI piste.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \quad y = x^2 - 4x + 2 \end{cases} \overset{\text{laskin}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Paraabelin huipun x-koordinaatti saadaan paraabelin ja x-akselin leikkaupisteiden x-koordinaattien keskiarvosta ja y-koordinaatti sitten sijoittamalla edellä saatu x-koordinaatin arvo paraabelin yhtälöön.

c) Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Sijoitetaan tehtävän annosta saatavat paraabelin pisteet $(0,0), (20,7)$ ja $(40,0)$ paraabelin yhtälöön (koska nämä pisteet toteuttavat paraabelin yhtälön). Muodostuu yhtälöryhmä, ratkaistaan se.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 7 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c \\ 0 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \quad 0 = c \curvearrowright \text{sijoitus} \\ 7 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 0 \\ 0 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 \\ 0 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a \cdot 20^2 - 7}{-20} \curvearrowright \text{sijoitus} \\ \quad b = \dfrac{a \cdot 40^2}{-40} \end{cases} \Longrightarrow \frac{a \cdot 20^2 - 7}{-20} = \frac{a \cdot 40^2}{-40}$$

$$\Longrightarrow -40 \cdot (a \cdot 20^2 - 7) = -20 \cdot (a \cdot 40^2)$$

$$\Longrightarrow -40 \cdot (a \cdot 400 - 7) = -20 \cdot (a \cdot 1600)$$

$$\Longrightarrow\ -16000a + 280 = -32000a$$

$$\Longrightarrow\ 16000a = -280 \quad \Longrightarrow\ a = \frac{-280}{16000} = -\frac{7}{400}$$

$$\Longrightarrow b = \frac{-\frac{7}{400}\cdot 40^2}{-40} = \frac{-28}{-40} = \frac{7}{10}.$$

Näin ollen paraabelin ja pallon radan yhtälöksi tulee

$$y = -\frac{7}{400}x^2 + \frac{7}{10}x + 0.$$

/6

2. Millä parametrin k arvoilla suora $y = kx$ on paraabelin $y = -x^2 + 6x - 4$ tangentti? Entä sekantti?

i) Ratkaise hyödyntämällä Geogebraa, liitä kuvia vastaukseesi mukaan. **(2p)**

ii) Laskennallisesti, välivaiheita ja perusteluja mukaan. **(4p)**

i) Geogebralla piirto → liukukytkimen asteikon valinta ja tsekkaus.

ii) Määritetään ensin suoran ja paraabelin yhteinen(set) piste(et). Muodostuu yhtälöpari

$$\begin{cases} y = kx \\ y = -x^2 + 6x - 4 \end{cases},$$

josta saadaan yhtälö (ideana $y = y$)

$$kx = -x^2 + 6x - 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + (k-6)x + 4 = 0\,.$$

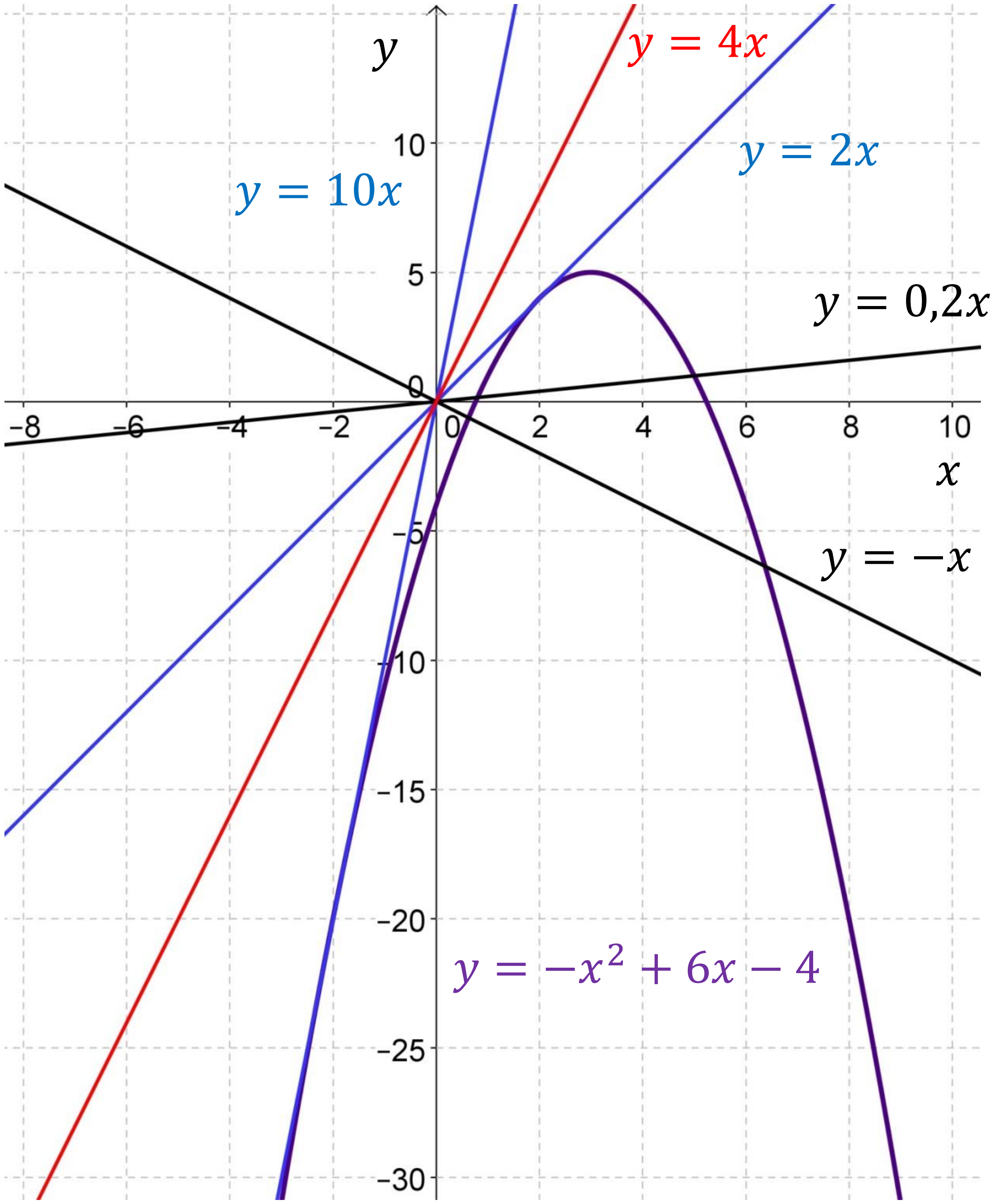
Yhteisiä pisteitä on siis maksimissaan kaksi, minimissään nolla. Lukumäärän antaa diskriminantin tutkiminen. Kun $D > 0$, niin ratkaisuja on kaksi ja kyseessä on sekantti, jos $D = 0$, niin löytyy vain yksi ratkaisu ja kyseessä on tangentti ja jos $D < 0$, niin ei löydy reaalisia ratkaisuja eikä suora näin ollen leikkaa paraabelia ollenkaan.

$$D = (k-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = k^2 - 12k + 36 - 16 = k^2 - 12k + 20$$

$$\Longrightarrow \quad D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 2 \ \text{tai}\ k = 10\,.$$

Lauseke $k^2 - 12k + 20$ kuvaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, joka saa positiivisia arvoja, kun $k < 2$ tai $k > 10$ ja negatiivisia arvoja, kun $2 < k < 10$ sekä arvon nolla, kun $k = 2$ tai $k = 10$.

Näin ollen suora $y = kx$ on paraabelille tangentti, kun $k = 2$ tai $k = 10$ ja sekantti, kun $k < 2$ tai $k > 10$, katso kuva alla.



/6

3. **a)** Etsi paraabelin $y = x^2$ polttopiste ja johtosuora perustellen. Liitä ratkaisuusi kuvia Gogebrasta. **(3p)** OHJEET: Etsi ensin paraabelin huippupiste, sitten päättele mitä muotoa polttopiste ja johtosuora ovat. (1p). Tämän jälkeen muodosta yhtälö, johon olet sijoittanut mielivaltaisen paraabelin pisteen koordinaatit. Huom! Tulisi olla yhtälö, jossa on vain yksi muuttuja, joten… (1p) Lopuksi: paraabelin huippu toteuttaa yhtälön, joten sijoittamalla sen koordinaatit saadaan eräs tieto ja toisaalta myös jokin toinen piste (mikä?) toteuttaa samaisen yhtälön. Näin ollen polttopiste on muotoa ? ja johtosuora muotoa ?.(1p)

b) Määritä paraabelin $-2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ huippupiste, aukeamissuunta ja symmetria-akseli perustellen = välivaiheineen, eli pelkkä Geogebra → 0p. **(3p)**

a) Paraabeli $y = x^2$ on siis muotoa $y - 0 = 1 \cdot (x-0)^2$. Huipun koordinaatit ovat $(0{,}0)$. Tämän saa toki todeta suoraan. Tästä kuitenkin seuraa, että

- Polttopiste on pakko olla muotoa $(0, a)$, koska huipun x-koordinaatti on 0 ja paraabelilla ei ole 1.asteen termiä.

- Johtosuora on muotoa $y = b$, koska paraabeli aukeaa YLÖS.

Näin ollen pitää selvittää tuntemattomat a ja b. **(1p)**

Koska paraabelin mielivaltainen piste on muotoa $(x, y) = (x, x^2)$ niin muodostuu yhtälö (paraabelin määritelmästä)

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = |y - b|$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x^2-0)^2} = |x^2 - b|, \qquad |(\quad)^2$$

josta saadaan (eli tämän voi laskea koneella… solve($\sqrt{(x-0)^2 + (x^2-0)^2} = |x^2 - b|, x$)…jne.)

$$x^2 - 2 \cdot x^2(a-b) + a^2 - b^2 = 0 \qquad\qquad (\mathbf{1p})$$

Nyt huipun koordinaatit $(0{,}0)$ toteuttavat tämän yhtälön, joten on oltava

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{eli} \qquad a = \pm b$$

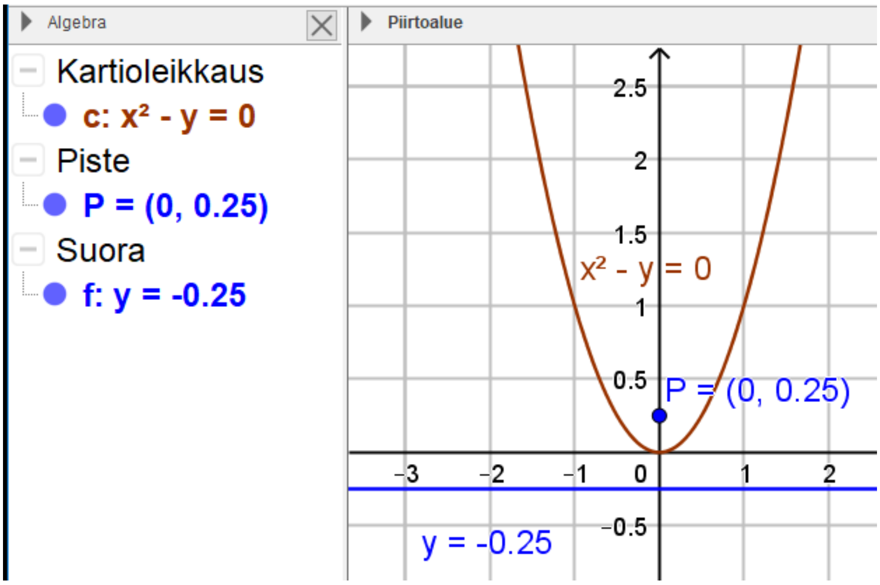
Toisaalta polttopiste ei kuulu johtosuoralle, joten $a = -b$. Eli a:n on oltava eri kuin b.

Myös esim. piste $(1{,}1)$ toteuttavat yllä saadun yhtälön, joten (sijoitetaan samalla $a = -b$)

$$1^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot (-b - b) + (-b)^2 - b^2 = 0 \quad \text{eli} \quad 1 = -4b \quad \text{siis} \quad b = -\frac{1}{4}\,.$$

Ja näin ollen $= \frac{1}{4}$.

Siis polttopiste on muotoa $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, ja johtosuora muo-toa $y = -\frac{1}{4}$.



b) Saadaan $-2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x - 3 = 2y^2 + 4y$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}y$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(y^2 + 2y)$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(y^2 + 2y + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}(y + 1)^2$$

Siis, huippupiste on $\left(-\frac{1}{6}, -1\right)$, aukeamissuunta VASEN ja symmetria-akseli $y = -1$.

/6
/18