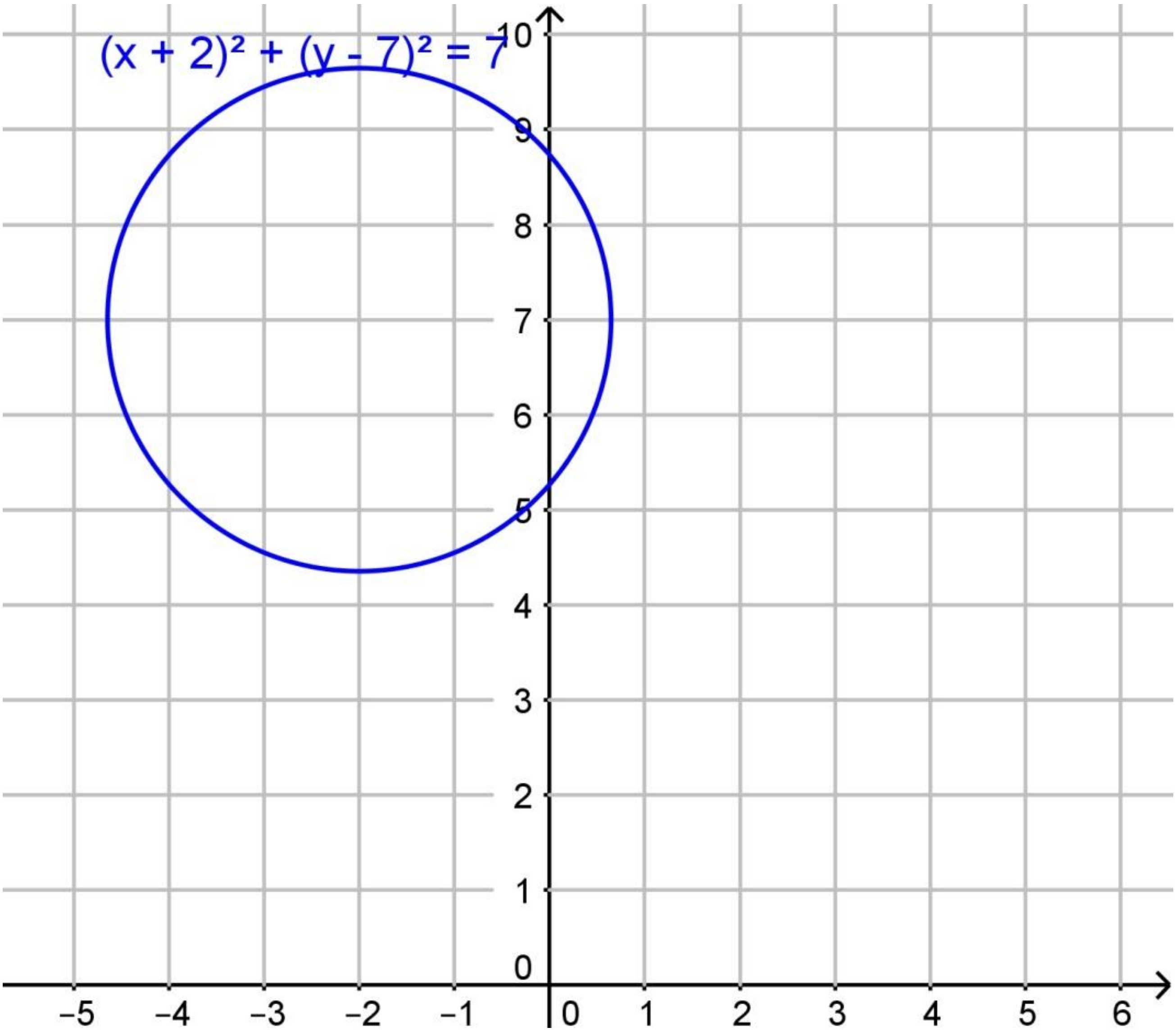
Matematiikan TESTI 4, Maa5 – Analyyttinen Geometria – RATKAISUT **Sievin lukio**
Maanantai 22.5.2017
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN! MAOL ON SALLITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

1. **a)** Muodosta keskipistemuotoinen ja normaalimuotoinen yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on $(-2,7)$ ja säde on $\sqrt{7}$. Liitä kuva mukaan. **(1p)**

Yhtälöt ovat

$$\left(x-(-2)\right)^2+(y-7)^2=\sqrt{7}^2 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2+(y-7)^2=7$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+4x-14y+46=0$$



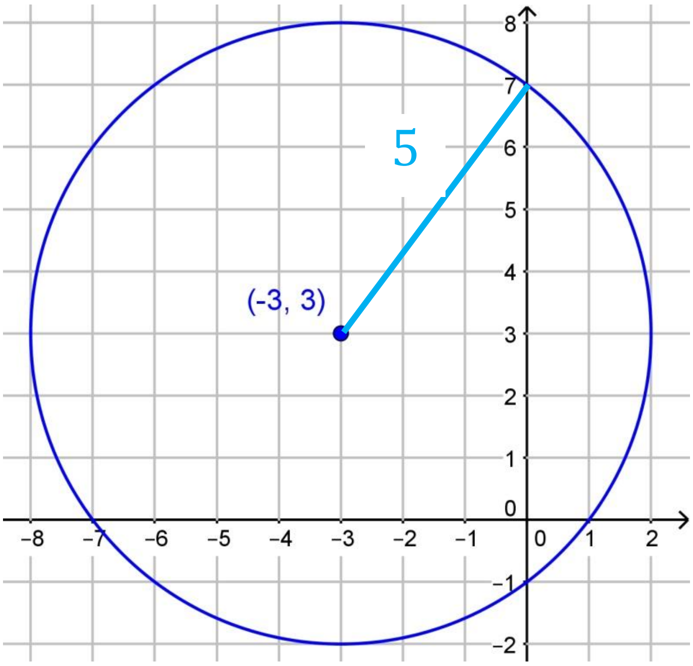
b) Muodosta normaalimuotoinen yhtälö kuvassa olevalle ympyrälle. **(2p)**

Ensin säde, pisteet ovat $(-3,3)$ ja $(0,7)$: $r=\sqrt{\left(0-(-3)\right)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$

Yhtälö on

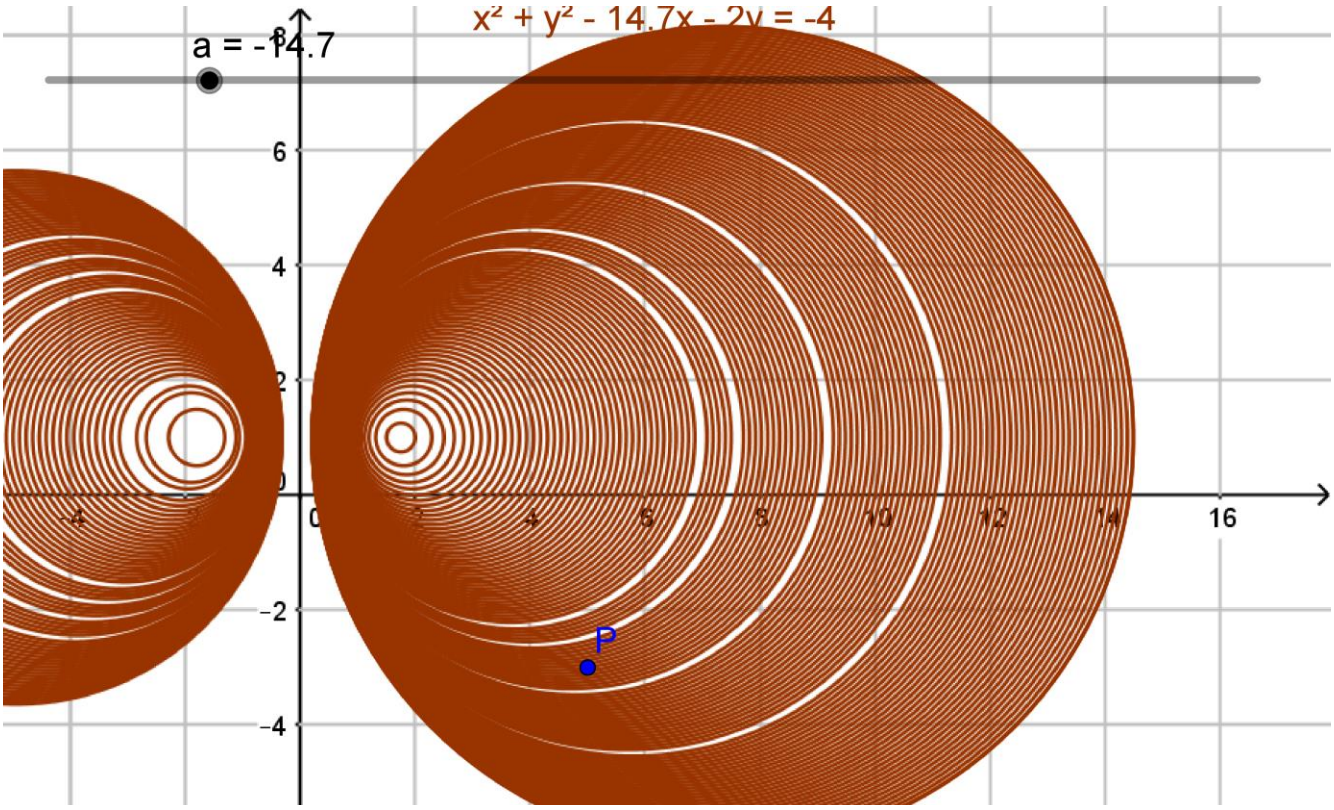
$$\left(x-(-3)\right)^2+(y-3)^2=5^2 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2+(y-3)^2=25$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 25 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$$

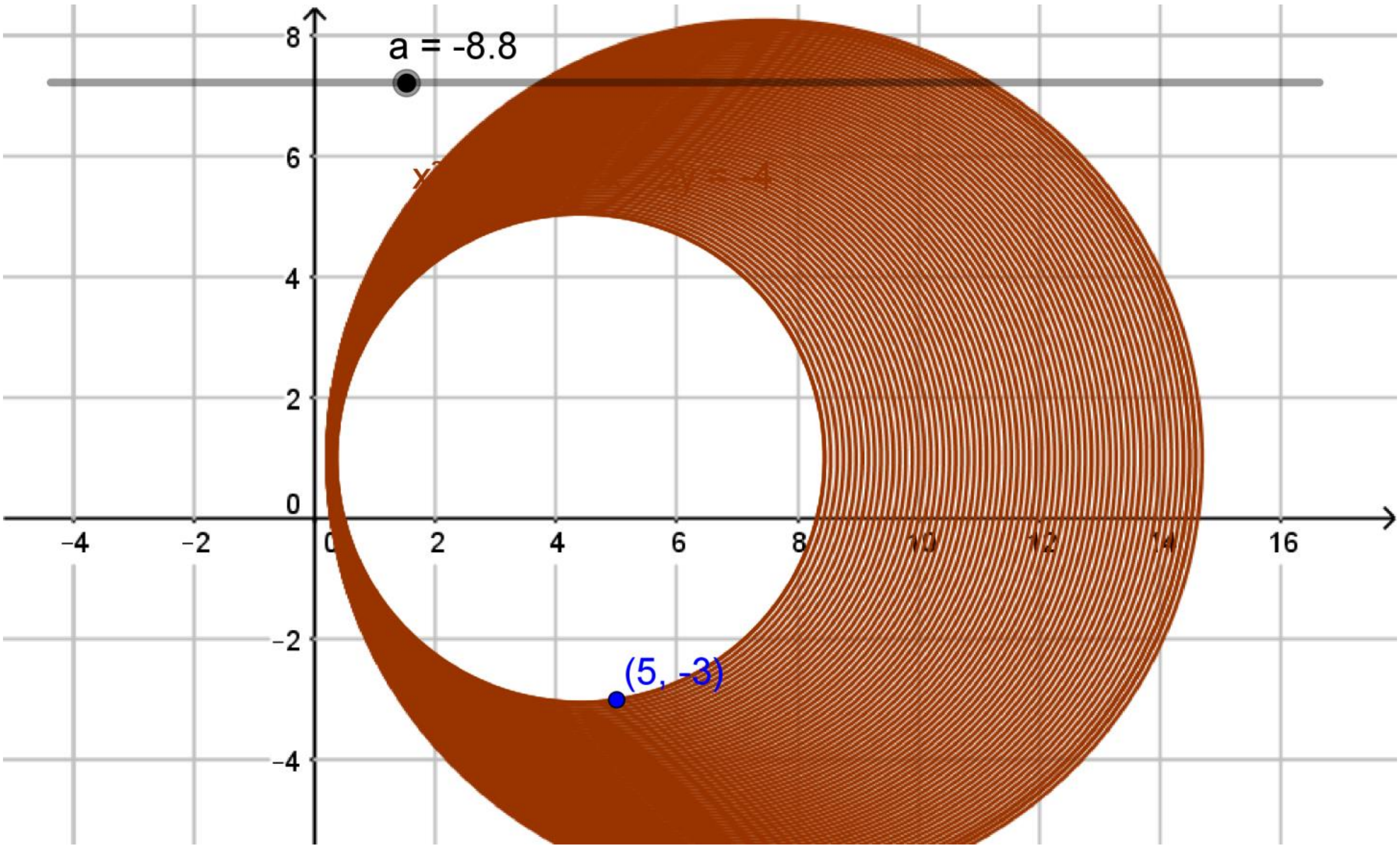


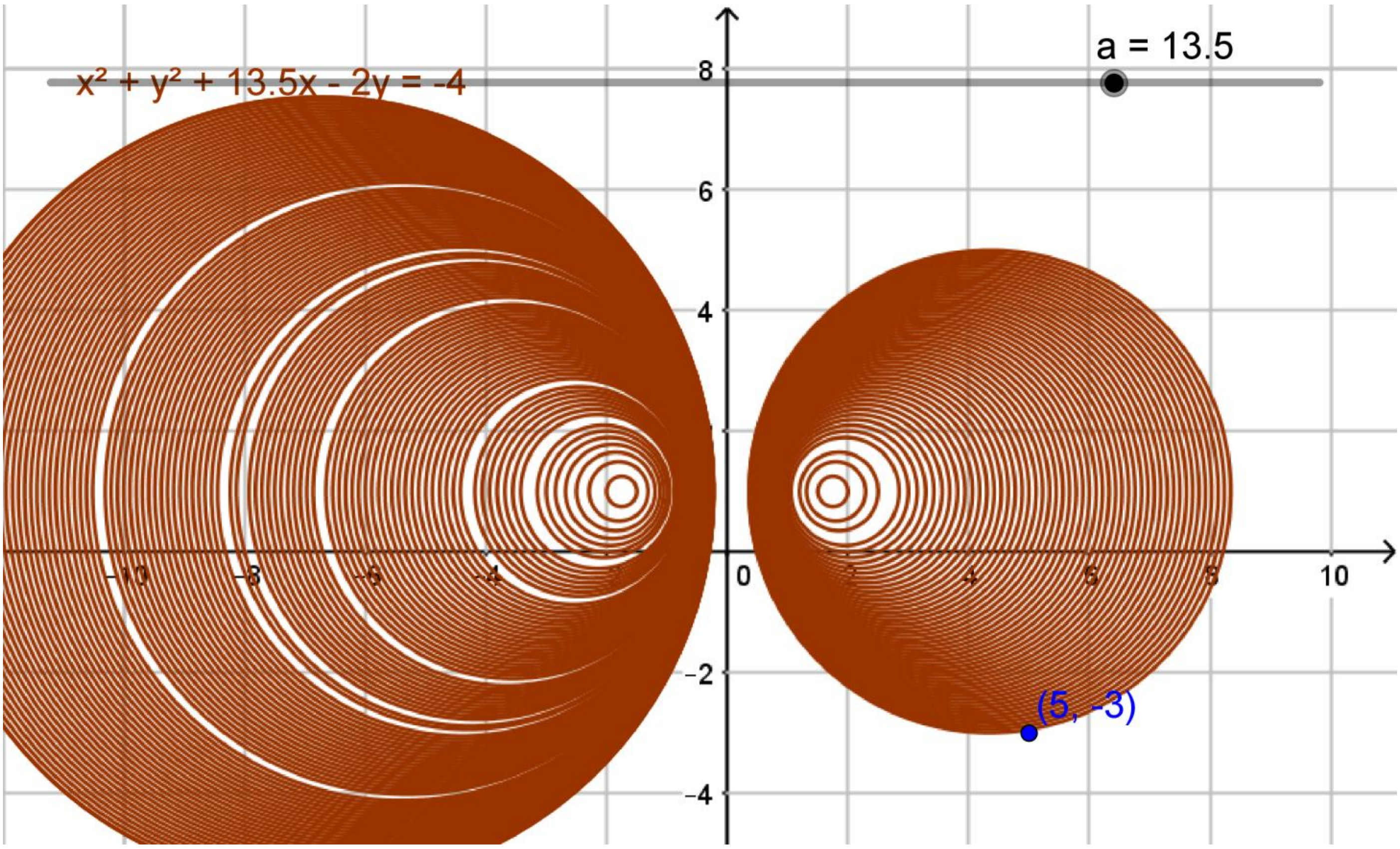
c) Millä parametrin a arvolla piste $(5, -3)$ on ympyrän $x^2 + y^2 + ax - 2y + 4 = 0$ sisäpuolella, ympyrällä tai ulkopuolella. Riittää antaa kaikissa tapauksissa jokin parametrin a arvo. Mainitse vielä lyhyesti, kuinka perustelet pisteen sijainnin matemaattisesti, eli analyyttisen geometrian kielen avulla. **(3p)**

Kyseessä on ympyräparvi, joten



Havaitaan, että kun parametrin a arvo on alle $-8{,}8$, niin piste $(5,-3)$ on ympyrän sisäpuolella ja kun parametrin a arvo on tasan $-8{,}8$, niin piste $(5,-3)$ on ympyrällä ja kun parametrin a arvo on yli $-8{,}8$, niin piste $(5,-3)$ on ympyrän ulkopuolella. Katso kuvat alla.





/6

2. **a)** Päättele puuttuvat luvut. **(2p)**

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

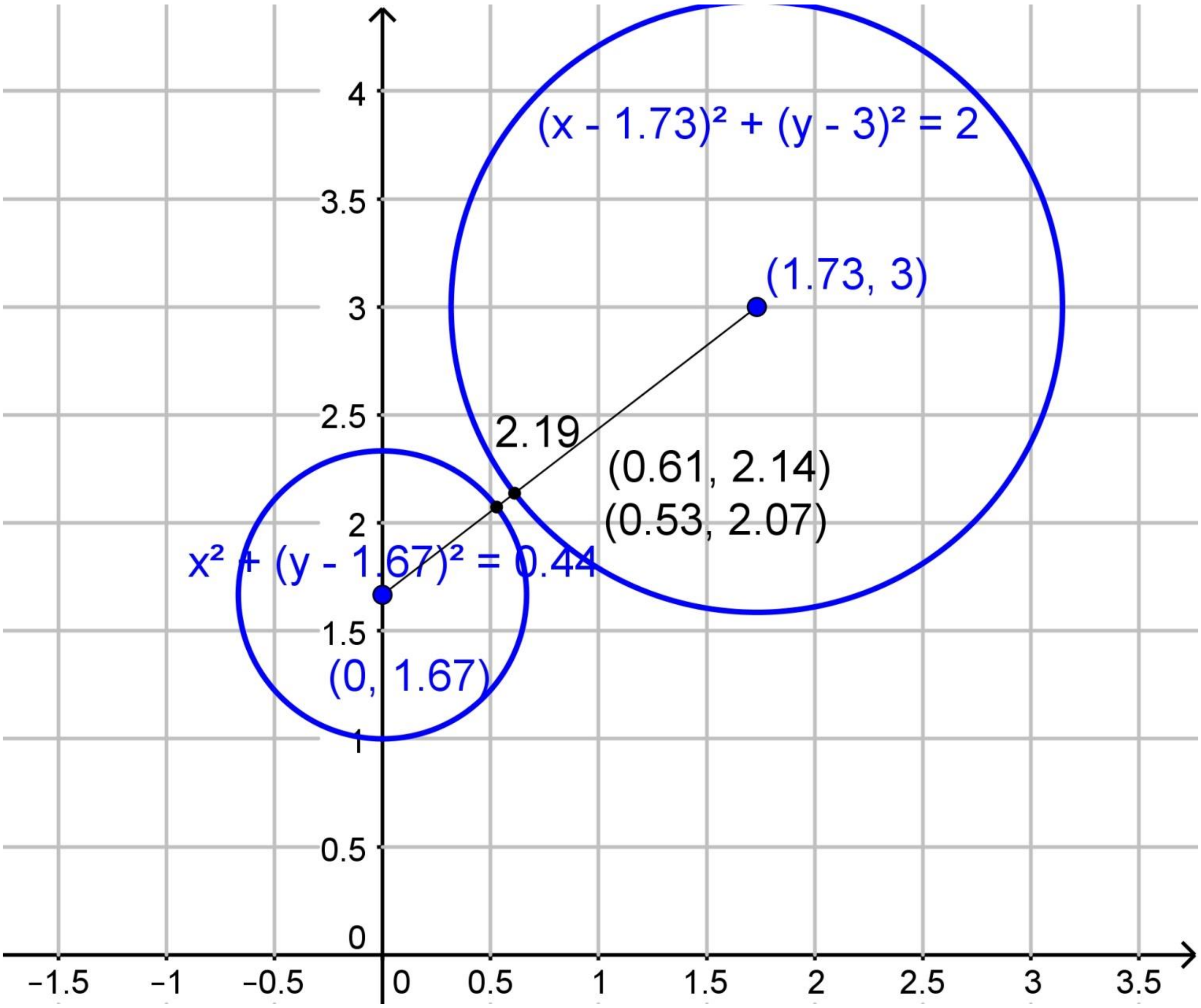
$$y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2$$

b) Määritä ympyröiden $3x^2 + 3y^2 - 10y + 7 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y + 10 = 0$ välinen etäisyys.

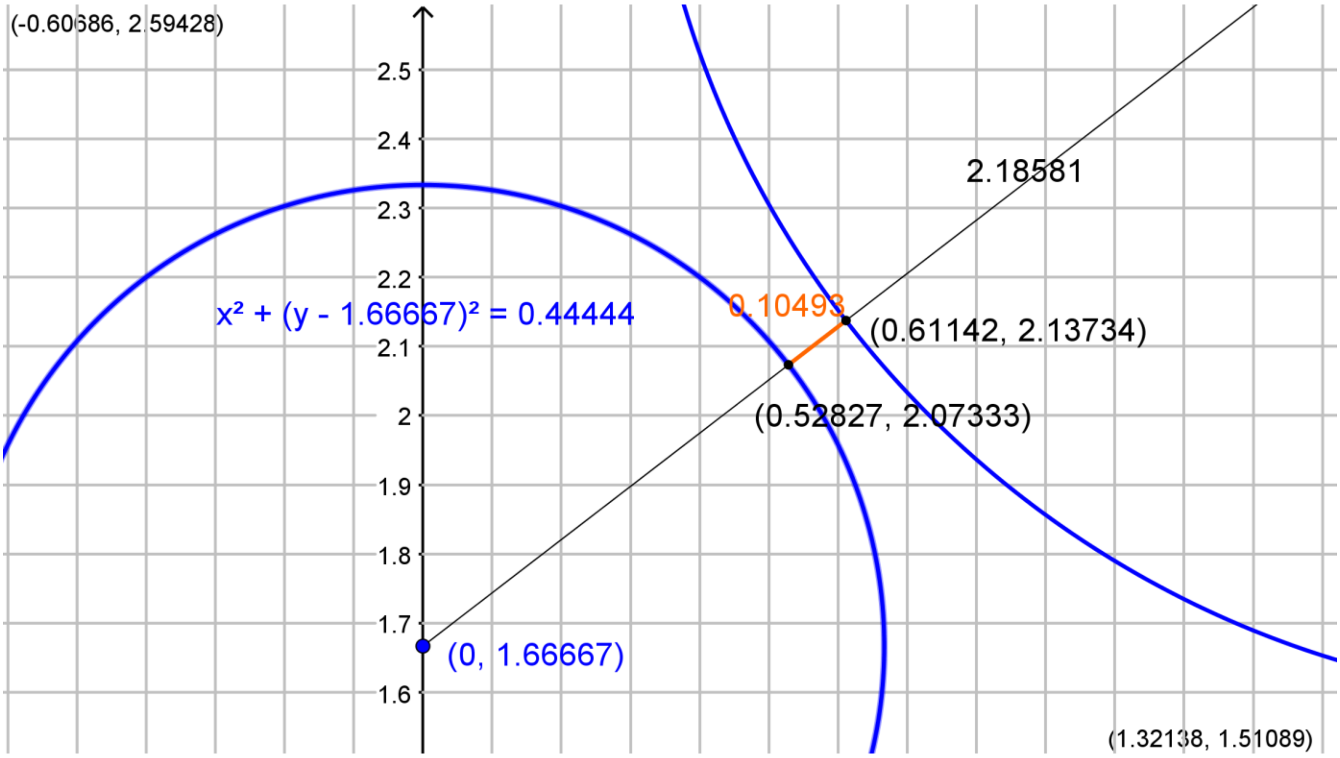
Ratkaise tehtävä

i) Hyödyntämällä geogebraa, liitä kuvia vastaukseesi mukaan. **(1p)**

Piirretään ympyrät ja määritetään etäisyys geogebraa käyttäen.



Etäisyydeksi saadaan $2{,}19 - \sqrt{0{,}44} - \sqrt{2} \approx 0{,}11$. Tarkemmin 0,10493 katso kuva alla.



ii) Laskennallisesti, välivaiheita ja perusteluja mukaan. **(3p)**

Ympyröiden yhtälöt keskipistemuodossa ovat:

$$3x^2+3y^2-10y+7=0 \quad \overset{:3}{\Longrightarrow} \quad x^2+y^2-\frac{10}{3}y+\frac{7}{3}=0$$

$$\Longrightarrow \quad (x-0)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}-\frac{7}{3}=\frac{4}{9} \quad \Longrightarrow \quad (x-0)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

ja

$$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-6y+10=0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{x^2-2\sqrt{3}x+3}+\underbrace{y^2-6y+9}+10=0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

Ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on $d=\sqrt{\left(0-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{43}}{3}$. Joten ympyröiden välinen etäisyys on

$$d-r_1-r_2=\frac{\sqrt{43}}{3}-\frac{2}{3}-\sqrt{2}=0{,}104\,932\,\ldots.$$

/6

3. **a)** Etsi yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on suoralla $y = \frac{1}{2}x$ ja joka sivuaa x-akselia ja suoraa $4x + 3y - 24 = 0$. Määritä tehtävän kaikki ratkaisut. [YO K03/7]

OHJE: Koska ympyrän keskipiste on suoralla, niin keskipisteen koordinaatit ovat muotoa $(x_0, y_0) = (x_0, \frac{1}{2}x_0)$. Näin ollen ympyrän yhtälö on

$$(x - \_\_\_\_\_)^2 + (y - \_\_\_\_\_)^2 = r^2.$$

On pädettävä $r = r$, eli... (muodosta säteen lauseke annetuista tiedoista kahdella eri tavalla ja ratkaise muodostuva yhtälöpari). **(2p)**

Ympyrän yhtälö on

$$(x - x_0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}x_0\right)^2 = r^2$$

Koska ympyrän säde voidaan ilmoittaa kahdella eri tavalla tehtävänannon tiedoista, niin muodostuu yhtälöpari, siis

$$\begin{cases} r = \left|\frac{1}{2}x_0 - 0\right| \\ r = \frac{\left|4 \cdot x_0 + 3 \cdot \frac{1}{2}x_0 - 24\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \end{cases},$$

missä ensimmäinen yhtälö saadaan tiedosta *ympyrä sivuaa x-akselia*. Muista: x-akselilla $y = 0$, joten säde $r = |y_0 - 0| = \left|\frac{1}{2}x_0 - 0\right|$. Jälkimmäinen yhtälö saadaan tiedosta *ympyrä sivuaa suoraa* $4x + 3y - 24 = 0$, joten pist. etäisyys suorasta antaa säteen $r = \frac{\left|4 \cdot x_0 + 3 \cdot \frac{1}{2}x_0 - 24\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}$, josta $5r = \left|4 \cdot x_0 + 3 \cdot \frac{1}{2}x_0 - 24\right|$.

Sijoitetaan ensimmäinen jälkimmäiseen:

$$5 \cdot \left|\frac{1}{2}x_0 - 0\right| = \left|4 \cdot x_0 + 3 \cdot \frac{1}{2}x_0 - 24\right|$$

$$\left|\frac{5}{2}x_0\right| = \left|\frac{11}{2}x_0 - 24\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2}x_0 = \frac{11}{2}x_0 - 24 \quad \text{tai} \quad \frac{5}{2}x_0 = -\frac{11}{2}x_0 + 24$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 8 \quad \text{tai} \quad x_0 = 3$$

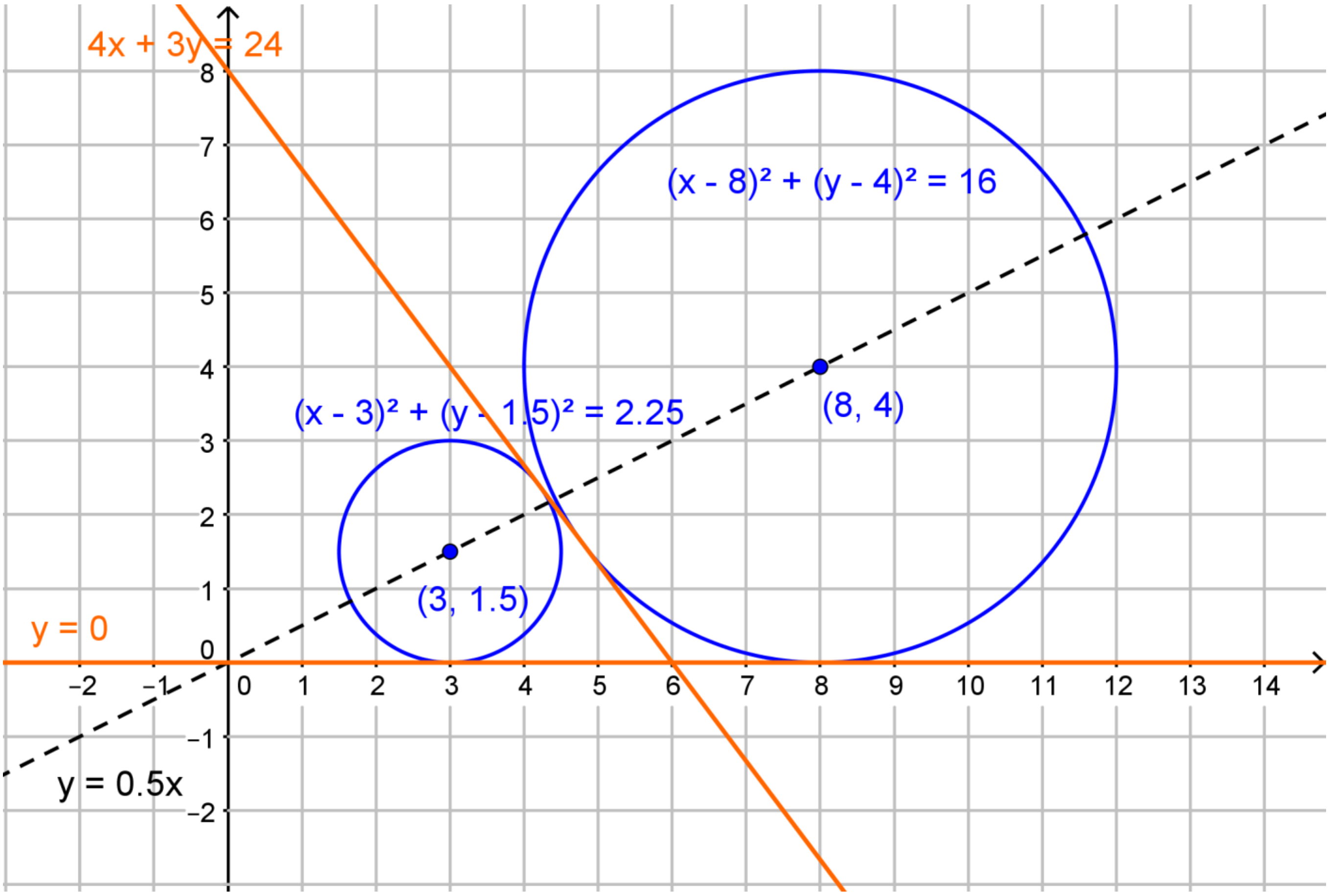
$$\Rightarrow \quad y_0 = 4 \text{ ja } r = 4 \quad \text{tai} \quad y_0 = \frac{3}{2} \text{ ja } r = \frac{3}{2}$$

Siis, ympyrän yhtälö on

$$(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16, \qquad (x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \; x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$$

Katso kuva alla!



b) Tehtävä 460 - JUURI 5

i) Etsi jokin ympyrä, joka sivuaa suoraa $2x + 3y - 7 = 0$. VIHJE: Tehtävän ratkaisemisessa kannattaa hyödyntää ohjelmistoja, mutta siinä saattaa piileä tietty vaara. Huomaatko mikä? **(3p)**

IDEA: Muodostetaan suoralle normaali, jolla ympyrän keskipiste sijaitsee. Valitaan normaalilta ympyrän keskipiste niin, että keskipisteen etäisyys suorasta on valittu säde.

- Suora $2x + 3y - 7 = 0$ ratkaistussa muodossa on $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$. Näin ollen suoralle normaalin kulmakerroin on muotoa kk.$= \frac{3}{2}$.

- Valitaan jokin piste suoralta $2x + 3y - 7 = 0$, esim. $\left(0, \frac{7}{3}\right)$. Tämän pisteen kautta kulkeva normaali

$$y - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}.$$

- Ympyrän, joka sivuaa suoraa $2x + 3y - 7 = 0$ pisteessä $\left(0, \frac{7}{3}\right)$, keskipiste on normaalilla $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$. Näin ollen keskipiste on $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{3}\right)$.

- Valitaan ympyrälle säde, olkoon se 1. Tällöin pätee

$$1 = \frac{\left|2 \cdot x_0 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{3}\right) - 7\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{13} = \left|\frac{13}{2}x_0\right|$$

Havaitaan, että vakio supistuu pois ja näin ollen ympyrän keskipisteen x-koordinaatiksi saadaan

$$x_0 = \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{tai} \qquad x_0 = -\frac{2\sqrt{13}}{13} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

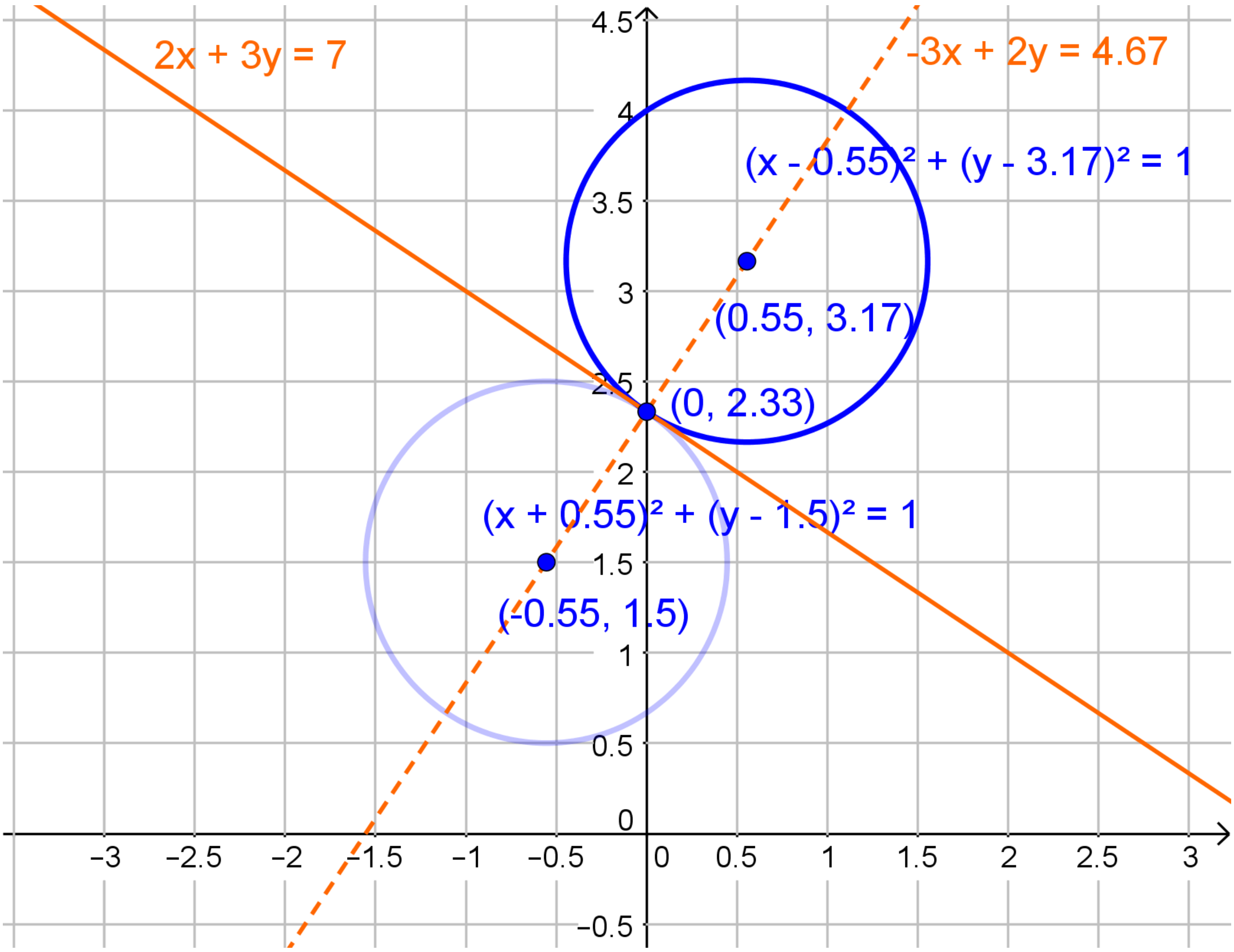
$$\Rightarrow \quad y_0 = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{7}{3} \qquad \text{tai} \qquad x_0 = -\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{7}{3}$$

Siis, kaksi keksipistettä (niin kuin tuleekin olla → katso kuva alla). Valitaan näistä toinen, esim.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{7}{3}\right)$$

- Erään ympyrän, joka sivuaa suoraa $2x + 3y - 7 = 0$, yhtälö on

$$\left(x - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(y - \left(\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{7}{3}\right)\right)^2 = 1^2$$



ii) Määritä **i)**-kohdan ympyrälle jokin tangentti perustellen. **(1p)**

Koska ympyrä sivuaa suoraa $2x + 3y - 7 = 0$, niin se on suoralle eräs tangentti.

/6

/18