VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

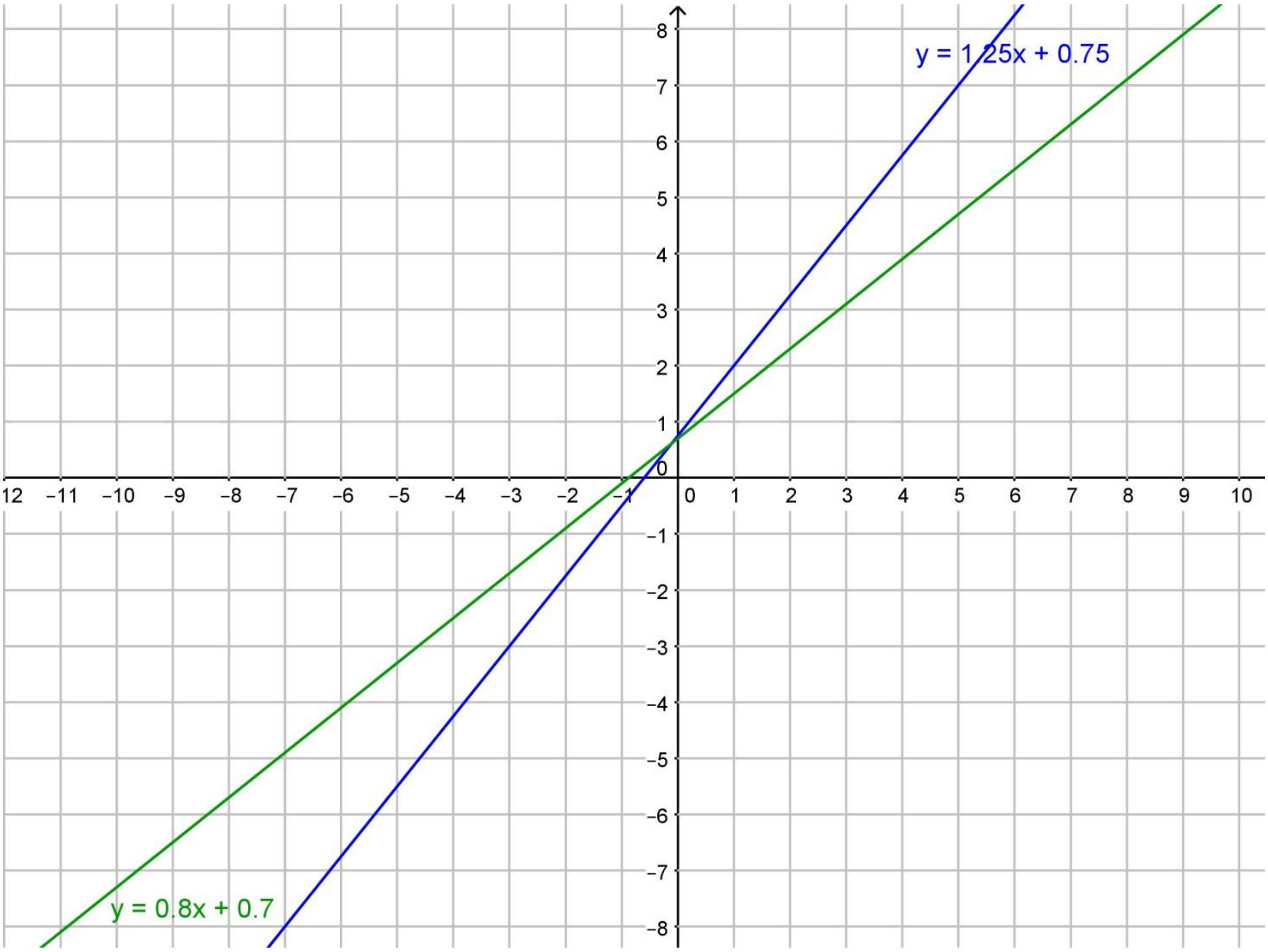
1. a) Kirjoita suorien $5x - 4y + 3 = 0$ ja $-8x + 10y - 7 = 0$ yhtälöt *ratkaistuun* muotoon. Ovatko suorat yhdensuuntaiset? Perustele piirtäen ja laskennallisesti. **(2p)**

Suorat ratkaistussa muodossa ovat:

$$5x - 4y + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = 5x + 3 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$-8x + 10y - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 10y = 8x + 7 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

Suorat eivät siis ole yhdensuuntaiset. Sama piirtäen.



b) Janan päätepisteen koordinaatit ovat $(-1,3)$ ja $(2,-4)$. Määritä janan keskinormaalin yhtälö *normaalimuodossa*. Saa hyödyntää ohjelmistoja, mutta kerro laskennallinen idea lyhyesti. **(2p)**

Idea: Ratkaistaan janan keskipiste.

$$M = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

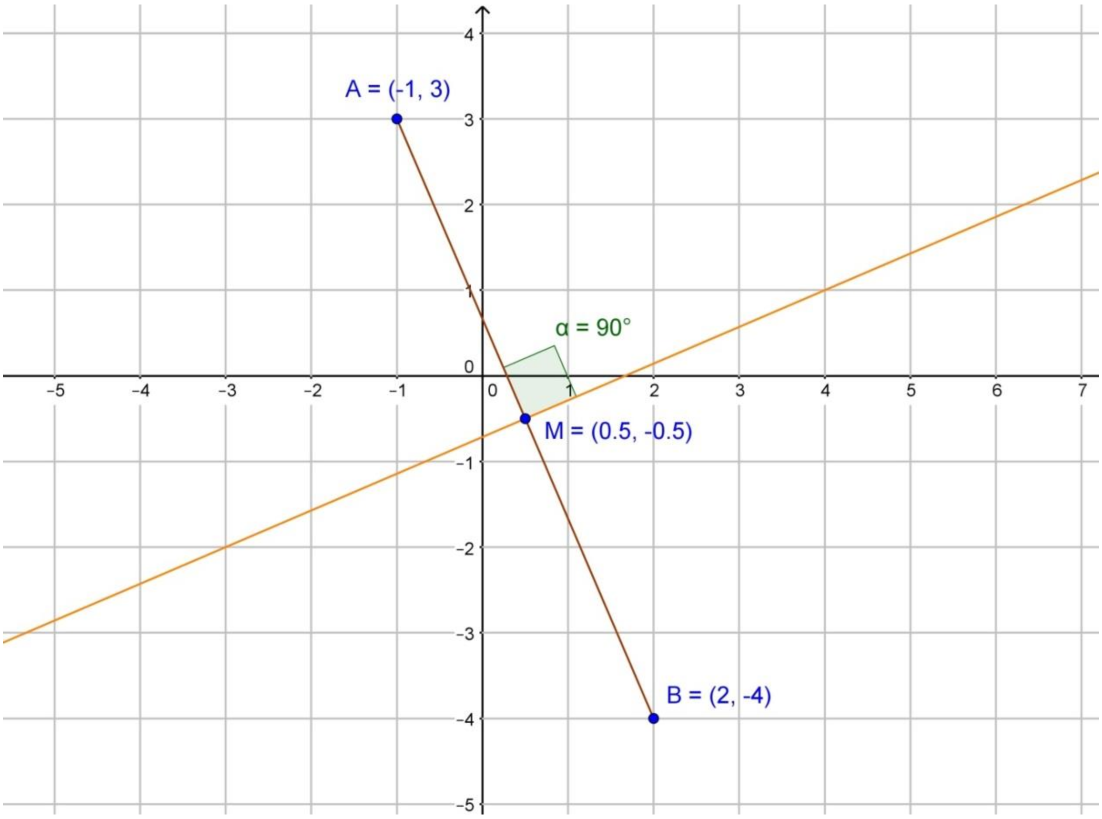
Ratkaistaan normaalin kulmakerroin.

$$k_{\text{jana}} = \frac{-4-3}{2+1} = -\frac{7}{3} \quad \Longrightarrow \quad k_{\text{normaali}} = \frac{-1}{k_{\text{jana}}} = \frac{3}{7}$$

Muodostetaan normaalin yhtälö

$$y + \frac{1}{2} = \frac{3}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y + \frac{1}{2} = \frac{3}{7}x - \frac{3}{14} \quad \overset{\cdot 14}{\Longrightarrow} \quad 14y + 7 = 6x - 3\,,$$

joka normaalimuodossa on $6x - 14y - 10 = 0$ eli $3x - 7y - 5 = 0$. Ohjelmistoilla sama asia, katso kuva alla



c) Millä vakion a arvolla suorien $ax - y + 1 = 0$ ja $y - 1 = 0$ välinen kulma on $30°$? **(2p)**

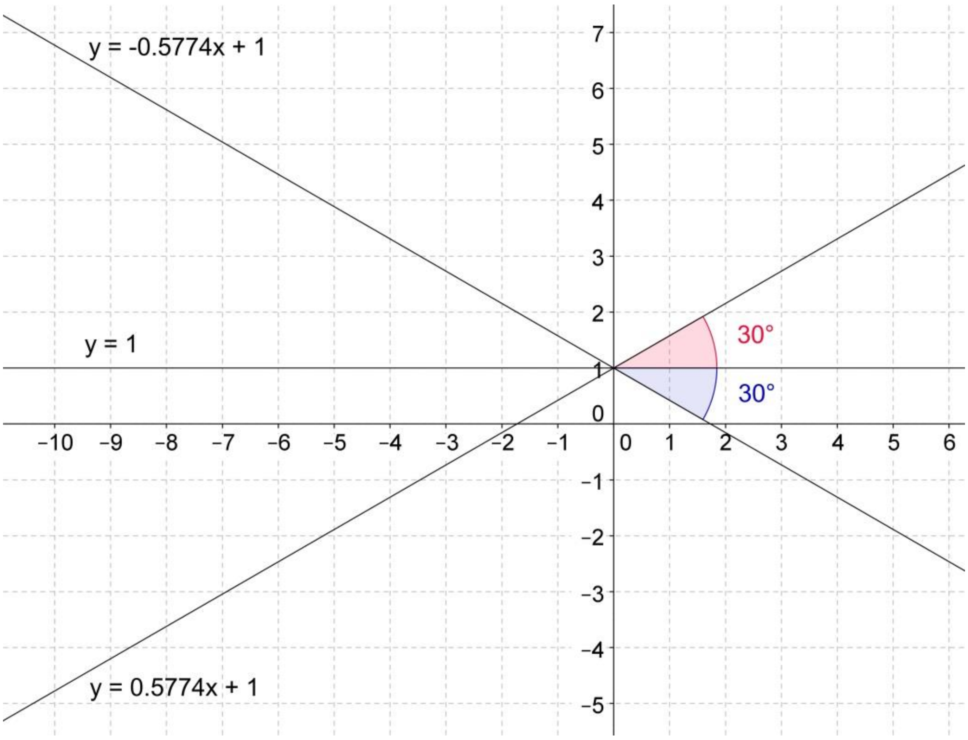
Määritetään suorien kulmakertoimet k_1 ja k_2, sijoitetaan lukuarvot yhtälöön $\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$, missä $\alpha = 30° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{6}$ ja ratkaistaan tuntematon a.

$$\begin{aligned} ax - y + 1 &= 0 \\ y - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y &= ax + 1 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} k_1 &= a \\ k_2 &= 0 \end{aligned}, \quad \text{lisäksi} \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Näin ollen

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \left|\frac{a - 0}{1 + a \cdot 0}\right| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = |a|.$$

Saadaan kaksi vaihtoehtoa: $a = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577\,350\ldots$ tai $a = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}577\,350\ldots$.



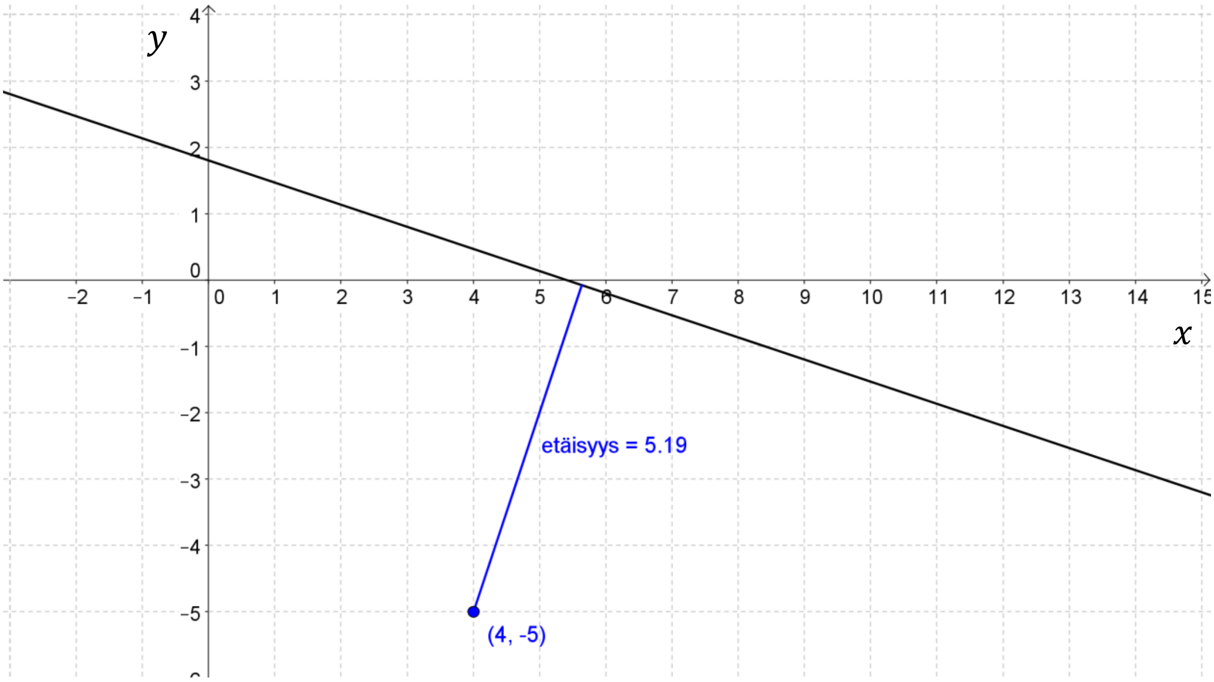
2. **a)** Määritä pisteen $(4,-5)$ etäisyys suorasta $y=-\frac{x}{3}+\frac{9}{5}$. **(2p)**

Suora pitää ensin muuttaa yleiseen muotoon, saadaan:

$$y=-\frac{x}{3}+\frac{9}{5}\ \overset{\cdot 15}{\Longrightarrow}\ 5x+15y-27=0.$$

Sijoitetaan tästä saatavat lukuarvot ”pisteen etäisyys suorasta” – yhtälöön $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Saadaan

$$d=\frac{|5\cdot 4+15\cdot(-5)-27|}{\sqrt{5^2+15^2}}=\frac{|-82|}{\sqrt{250}}=\frac{82}{5\sqrt{10}}\approx 5{,}186\,135\ldots\approx 5{,}19\qquad\left(\frac{82\sqrt{10}}{50}\right)$$



b) Pisteen $(1,4)$ kautta kulkeva suora muodostaa akseleiden kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 9. Määritä niiden suorien yhtälöt (laskennallisesti ei kuvasta katsoen), jotka rajaavat positiivisten koordinaattiakselien kanssa kolmion. Hyödynnä liitteessä olevaa geogebratiedostoa testi3_teht2b, ja pinta-alatoimintoa, katso kuva. **(4p)**

Suora $y - y_0 = k(x - x_0)$ kulkee pisteen $(1,4)$ kautta, joten sen yhtälö on muotoa

$$y - 4 = k(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = kx - k + 4.$$

Koska kyseessä on kolmio, joka muodostuu ensimmäiseen neljännekseen, saadaan kolmion korkeus suoran ja y-akselin leikkauspisteestä ja vastaavasti kolmion kanta suoran ja x-akselin leikkauspisteestä.

$$\text{korkeus: } y = k \cdot 0 - k + 4 = 4 - k, \qquad \text{kanta: } 0 = k \cdot x - k + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{k-4}{k}, \qquad k \neq 0.$$

Kolmion ala tiedetään olevan 9, joten

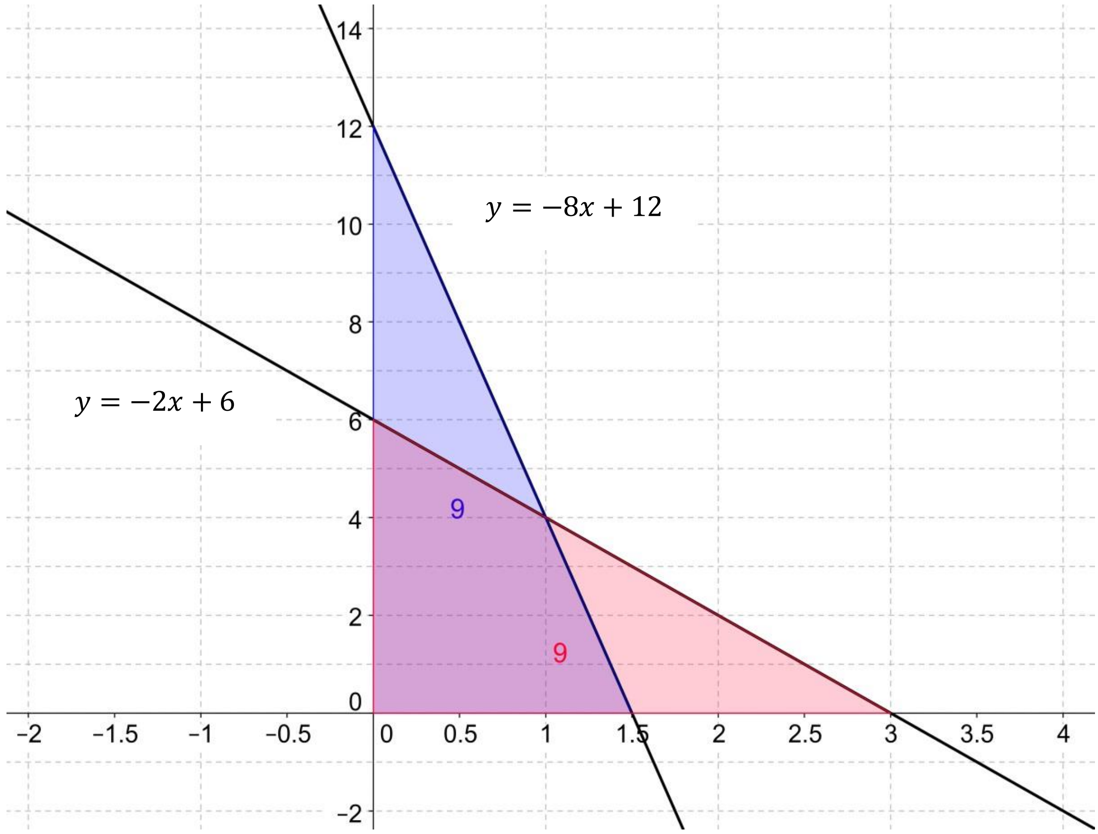
$$A_{\text{kolmio}} = 9 = \frac{1}{2} \cdot \text{kanta} \cdot \text{korkeus} \quad \Longrightarrow \quad 18 = \frac{k-4}{k} \cdot (4 - k) \quad \Longrightarrow \quad 18k = -k^2 + 8k - 16$$

$$\Longrightarrow \quad k^2 + 10k + 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -2 \ \vee \ k = -8.$$

Siis kaksi suoraa! Näiden yhtälöt ovat:

$$y = -2x - (-2) + 4 = -2x + 6, \qquad y = -8x - (-8) + 4 = -8x + 12.$$

Katso myös kuva (alla).



3. **a)** Suora kulkee pisteen (0,2) kautta ja suoran etäisyys pisteestä (7,1) on 5. Määritä suoran/suorien yhtälö/yhtälöt. **(3p)**

Suora $y - y_0 = k(x - x_0)$ kulkee pisteen $(0,2)$ kautta, joten sen yhtälö on muotoa

$$y - 2 = k(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = kx + 2 \quad \Leftrightarrow \quad kx - y + 2 = 0.$$

Sijoitetaan tästä saatavat tiedot "pisteen etäisyys suorasta" – yhtälöön $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Saadaan

$$5 = \frac{|k \cdot 7 - 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|7k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{k^2 + 1} = |7k + 1|,$$

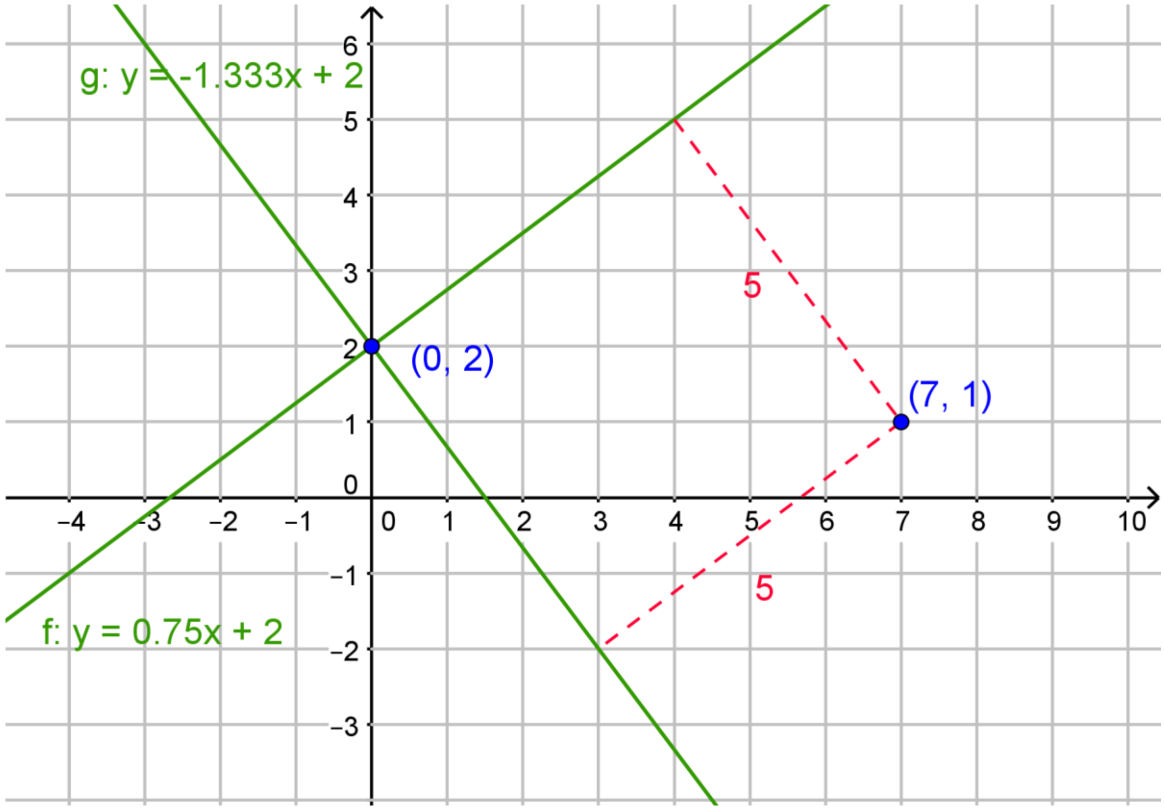
josta molemmat puolet toiseen korottamalla tulee yhtälö

$$25(k^2 + 1) = 49k^2 + 14k + 1 \quad \Rightarrow \quad 24k^2 + 14k - 24 = 0 \quad \overset{\text{laskin}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} k = \dfrac{3}{4} \\ k = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Näin ollen suorien yhtälöt ovat:

$$y = \frac{3}{4}x + 2, \qquad y = -\frac{4}{3}x + 2\,.$$

Kuva!



b) Millä vakion p arvoilla suorat $x + py + 6 = 0$ ja $px + 4y + 3p^2 = 0$ ovat yhdensuuntaiset eivätkä yhdy. **(3p)**

Muodostetaan yhtälöpari ja muutetaan suorat ratkaistuun muotoon, josta nähdään suorien kulmakertoimet, saadaan

$$\begin{cases} x + py + 6 = 0 \\ px + 4y + 3p^2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{p}x - \frac{6}{p}, & p \neq 0 \\ y = -\frac{p}{4}x - \frac{3p^2}{4} \end{cases}$$

Yhdensuuntaisuusehto saadaan kulmakertoimien yhtäsuuruudesta, eli

$$-\frac{1}{p} = -\frac{p}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{p} = \frac{p}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \pm 2.$$

Toisaalta suorat eivät saa yhtyä, eli vakiotermin on oltava eri, siis

$$-\frac{6}{p} \neq -\frac{3p^2}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{6}{p} \neq \frac{3p^2}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 3p^3 \neq 24 \quad \Longleftrightarrow \quad p \neq \sqrt[3]{8} = 2.$$

Yhdistetään saadut ehdot vakiolle p, jolloin ainoaksi vaihtoehdoksi jää $p = -2$.