Matematiikan TESTI 2, Maa5 – Analyyttinen Geometria – RATKAISUT **Sievin lukio**

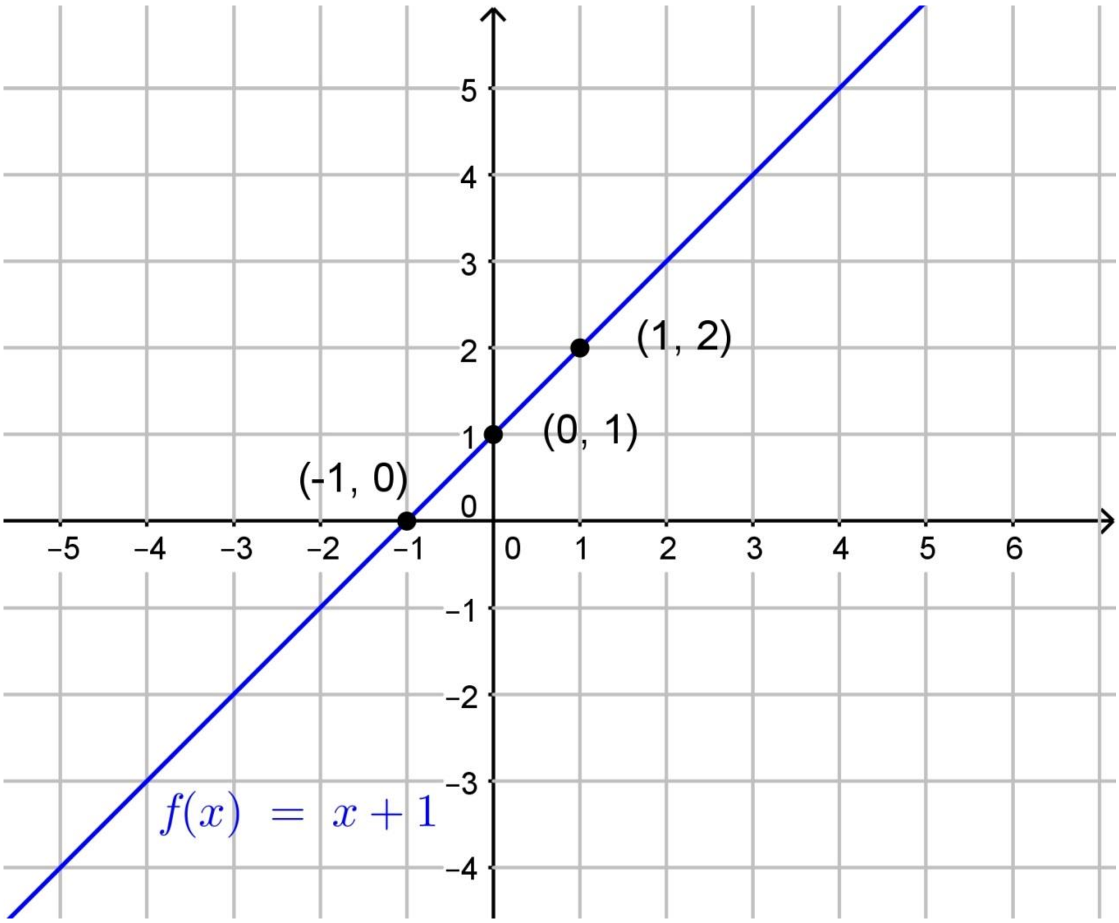
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

---

1. Saat käyttää ohjelmistoja! Liitä kuvia ratkaisuusi!

a) Ilmaise ehto xy-tason pistejoukon yhtälönä, määritä joitakin (2 kpl riittää) joukkoon kuuluvia pisteitä ja piirrä pistejoukko, kun pisteen y- ja x-koordinaattien erotus on 1. **(3p)**

Ehto on $y - x = 1$, eli $y = x + 1$. Pisteitä ovat esim. $(0,1)$, $(1,2)$, $(-1,0)$, jne.



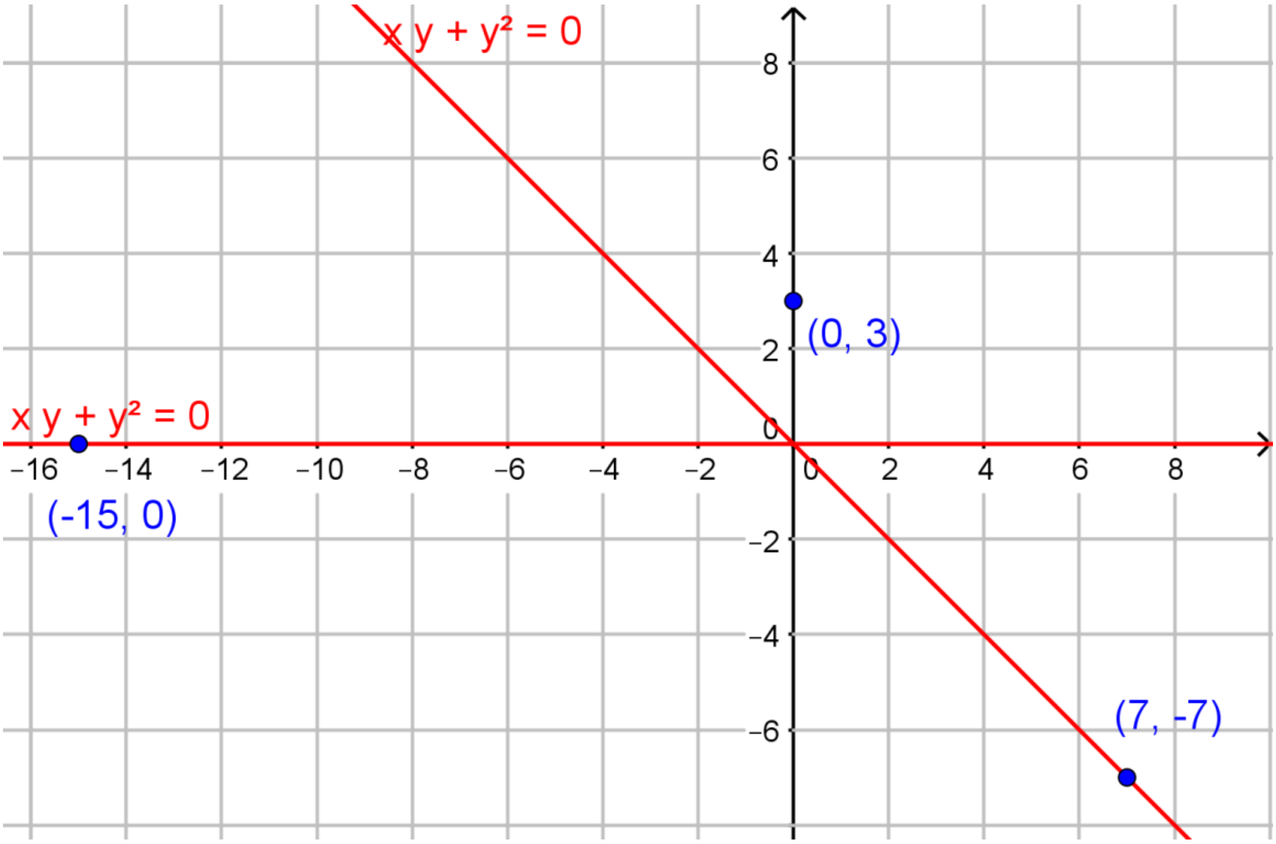
b) Pistejoukon yhtälö on $xy + y^2 = 0$. Tutki, ovatko pisteet $A = (0,3)$, $= (7,-7)$ ja $C = (-15,0)$ pistejoukossa. Piirrä joukko. **(3p)**

Pisteet ovat, mikäli yhtälö toteutuu. Siis sijoitus antaa:

$$0 \cdot 3 + 3^2 = 9 \neq 0, \qquad \text{EI OLE}$$

$$7 \cdot (-7) + (-7)^2 = -49 + 49 = 0, \qquad \text{ON}$$

$$-15 \cdot 0 + 0^2 = 0, \qquad \text{ON}$$



c)+0,5p Miten matemaattisesti sanotaan/ilmaistaan, että jokin piste on jossakin pistejoukossa? (Lyhyesti, eli 1 virke.)

Piste toteuttaa yhtälön, eli pisteen koordinaatit toteuttavat yhtälön.

/6

2. Saat käyttää ohjelmistoja! Liitä kuvia ratkaisuusi!

a) Millä parametrin *t* arvolla piste $(-1,1)$ toteuttaa käyrän yhtälön? **(1p)**

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 6t^2 + 3t \\ y = 2t - 1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Sijoittamalla annetun pisteen $(-1,1)$ koordinaatit saadaan parametrin t arvo määritettyä. Kannattaa käyttää y-koordinaattia! Siis $1 = 2t - 1$, josta $t = 1$.

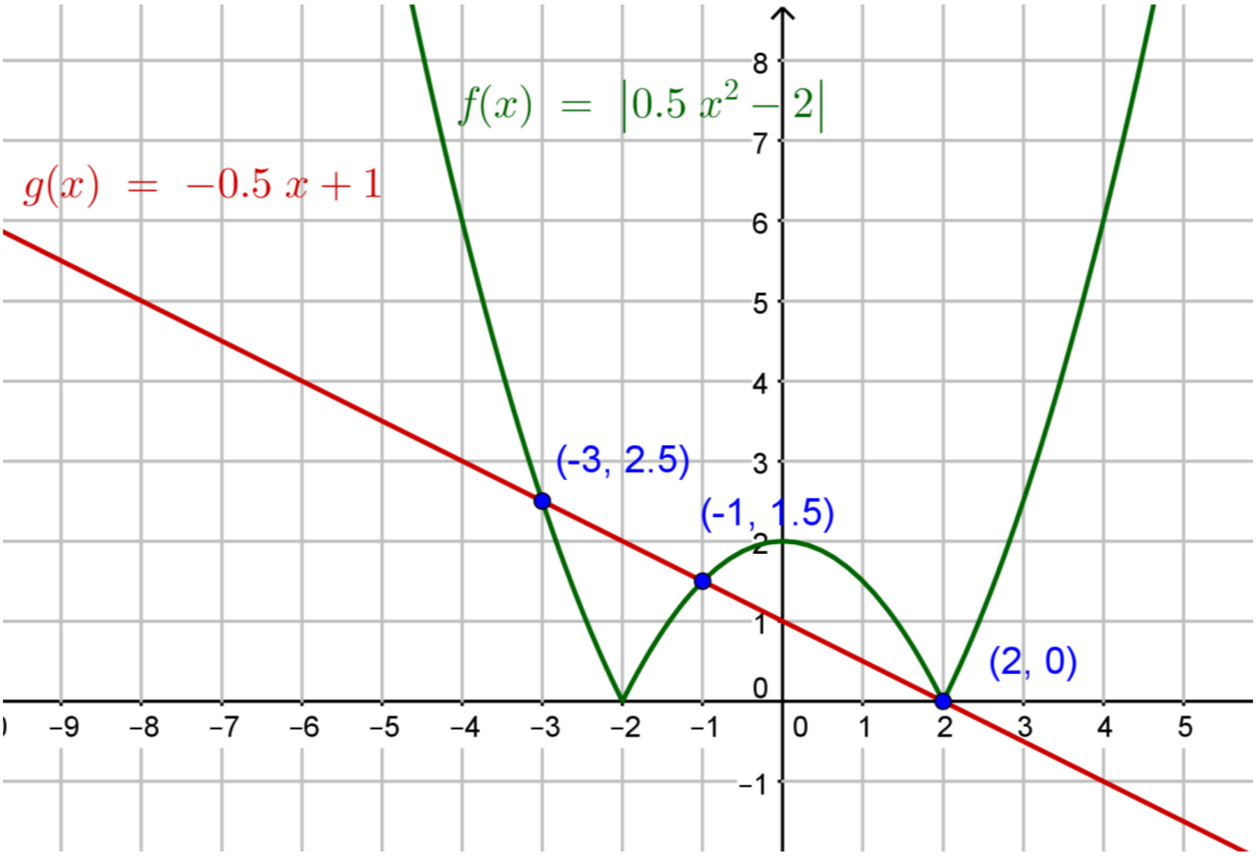
b) Ratkaise yhtälö graafisesti. **(2p)**

$$\left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| = -\frac{1}{2}x + 1$$

Graafinen ratkaisu antaa

$$x = -3, \qquad x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 2\,.$$

katso kuva alla.



c) Pisteen P x- ja y-koordinaatit ovat yhtä suuret ja pisteen P etäisyys pisteestä on $(0,2)$ on $2\sqrt{5}$. Määritä piste P. **(3p)**

/6

Koska koordinaatit ovat yhtäsuuret, niin voidaan kirjoittaa $P = (a, a)$. Tällöin P:n etäisyys pisteestä $(0,2)$ saadaan Pythagoraan kautta:

$$\sqrt{(a-0)^2 + (a-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a^2 + a^2 - 4a + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$\overset{(\ )^2}{\Longrightarrow} \quad a^2 + a^2 - 4a + 4 = 20$$

$$2a^2 - 4a - 16 = 0$$

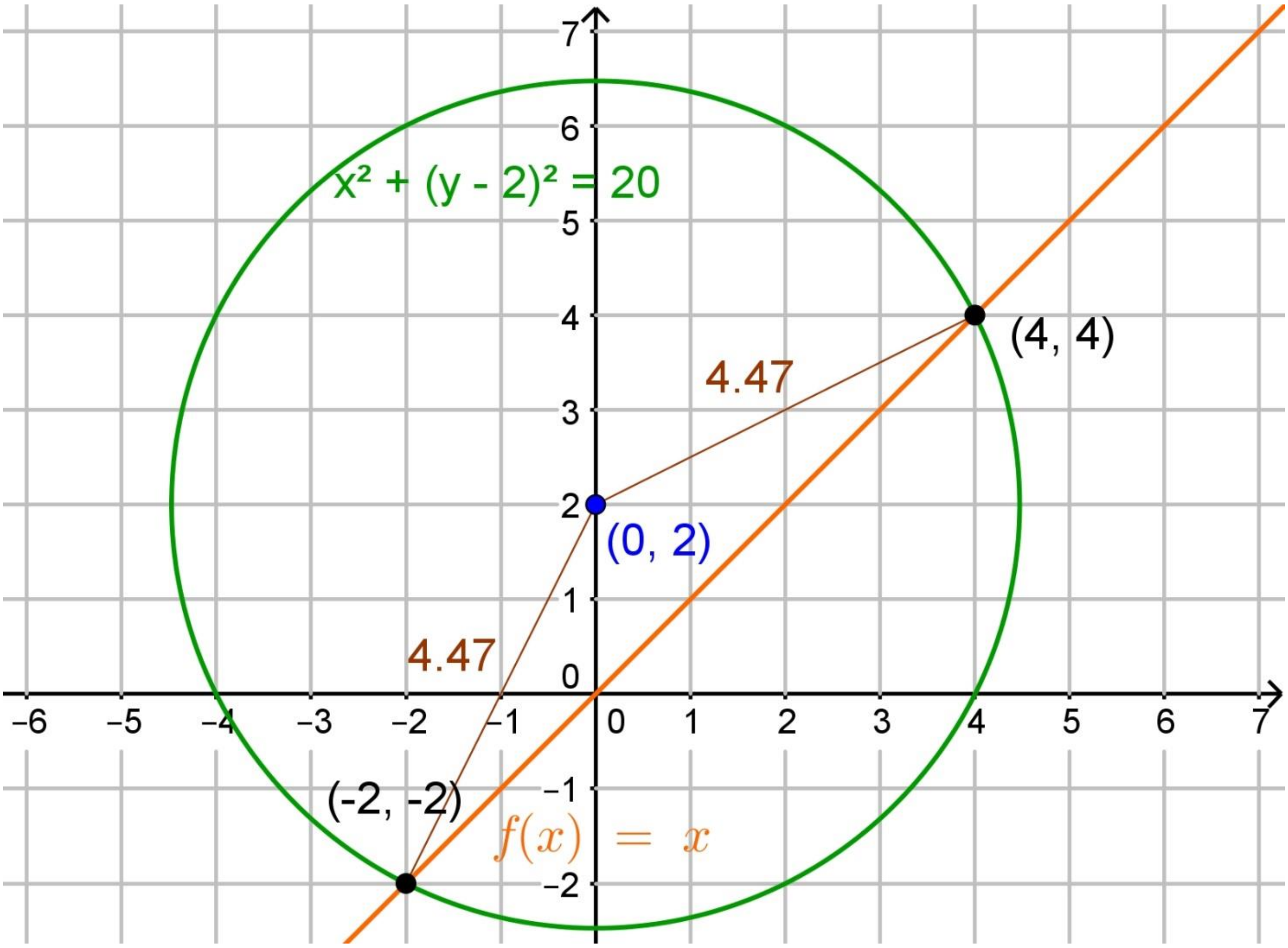
$$2(a^2 - 2a - 8) = 0$$

$$2(a+2)(a-4) = 0$$

$$\text{TAI} \quad \overset{\text{laskin}}{\Longrightarrow} \quad a = -2 \quad \text{tai} \quad a = 4$$

SIIS, piste $P = (-2, -2)$ tai $P = (4,4)$.

Graafinen ratkaisu:



3. Saat käyttää ohjelmistoja! Liitä kuvia ratkaisuusi!

a) Määritä suoran suuntakulma asteen kymmenesosan tarkkuudella, kun $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **(1p)**

Saadaan

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 30{,}0°\,.$$

b) Suoran a parametrimuoto on $\begin{cases} x = x_0 + 4t \\ y = y_0 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, missä (x_0, y_0) on jokin suoran a piste. Suora b kulkee pisteiden $A = (0{,}2)$ ja $B = (5{,}6)$ kautta. Leikkaavatko suorat a ja b toisensa? Kirjoita myös perusteluja (lyhyesti). **(2p)**

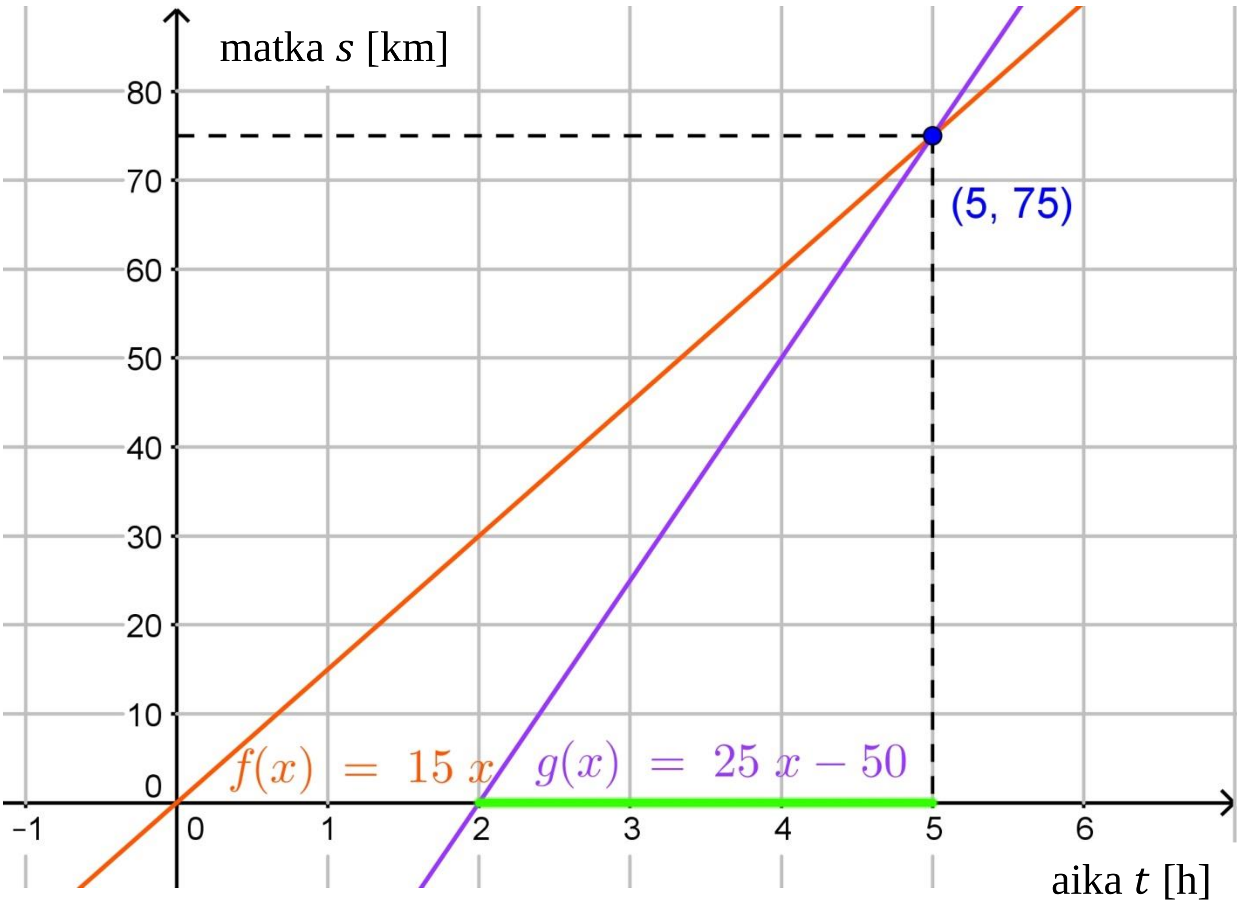
Suorat leikkaavat, mikäli niiden kulmakertoimet ovat eri. Suoran a kulmakerroin on $k_a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}$. Perustelut:

$$\begin{cases} x = x_0 + 4t \\ y = y_0 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y - y_0}{3} = \frac{x - x_0}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad y - y_0 = \frac{3}{4} \cdot (x - x_0)$$

$$\Longrightarrow \qquad y = \frac{3}{4} \cdot (x - x_0) + y_0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \underbrace{\frac{3}{4}}_{k} x \underbrace{- \frac{3}{4} \cdot x_0 + y_0}_{\text{vakio}}$$

Ja suoran b kulmakerroin on $k_b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{5-0} = \frac{4}{5}$. Siis, $k_a \neq k_b$ ja näin ollen suorat leikkaavat toisensa.

c) Risto lähti päivän pyöräretkiosuudelle kaksi tuntia Karin jälkeen. Kari pyöräilee nopeudella 15 km/h ja Risto 25 km/h. Piirrä koordinaatistoon heidän etenemistään kuvaavat suorat. Päättele kuviota hyödyntäen **i)** kuinka kauan Risto saa pyöräillä tavoittaakseen Karin ja **ii)** kuinka pitkän matkan kumpikin on tällöin pyöräillyt? *OHJE*. Ajattele vaaka-akseli aika-akseliksi ja pystyakseli matka- tai etäisyys -akseliksi. Mitä nopeus tällöin matemaattisesti tarkoittaa? Palauta mieleen FY1-kurssi. **(3p)**



i) Risto saa pyöräillä tavoittaakseen Karin kolme tuntia (vihreä paksu viiva x-akselilla) ja

ii) Molemmat ovat tällöin pyöräilleet 75 km.

4. Ratkaise Saat käyttää ohjelmistoja! Liitä kuvia ratkaisuusi!

Suora kulkee origon ja funktion $f: f(x) = -x^3 + 2x^2$ kuvaajalla olevan pisteen $P = (x, y) = (x, f(x))$ kautta. Miten piste P on valittava, jotta suoran kulmakerroin on

a) -3, **(2p)**

b) positiivinen, **(2p)**

c) suurin mahdollinen? **(2p)**

Hyödynnä geogebraa (esim. *piste objektilla* -toimintoa). Muista perustella!

Kuvaajalla olevat pisteet ovat muotoa $(x,y) = \big(x, f(x)\big) = (x, -x^3 + 2x^2)$

a) Koska $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, niin saadaan yhtälö

$$k = \frac{-x^3 + 2x^2 - 0}{x - 0} = -3 \quad \Longrightarrow \quad -3x = -x^3 + 2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

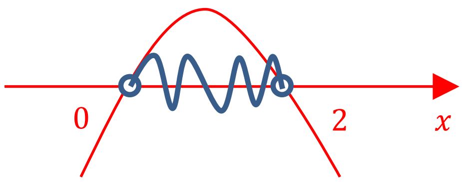
$$\Longrightarrow \qquad x(x-3)(x+1) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \text{, joista } x = 0 \text{ hylätään , miksi?}$$

Siis, pisteet ovat $P = (x,y) = (3,-9)$ tai $P = (x,y) = (-1,3)$. **(2p)**

b) Vastaavalla idealla: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$$k = \frac{-x^3 + 2x^2 - 0}{x - 0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(-x^2 + 2x)}{x} > 0 \quad \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow} \quad -x^2 + 2x > 0,$$

josta saadaan ratkaisu $x \in \,]0,2[$, katso kuva alla

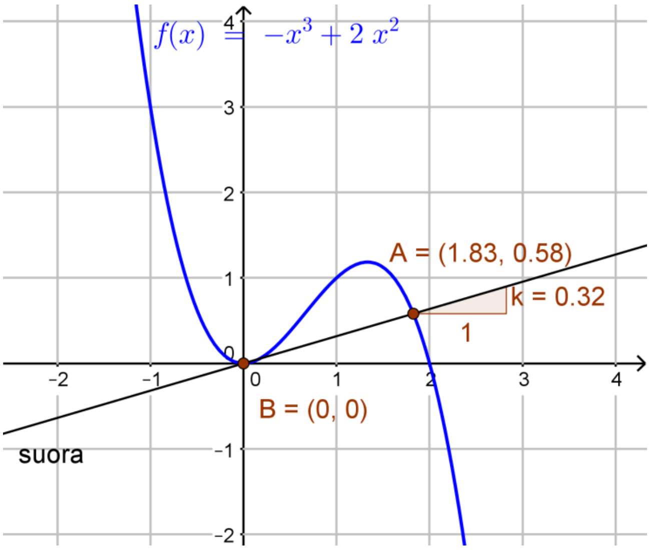


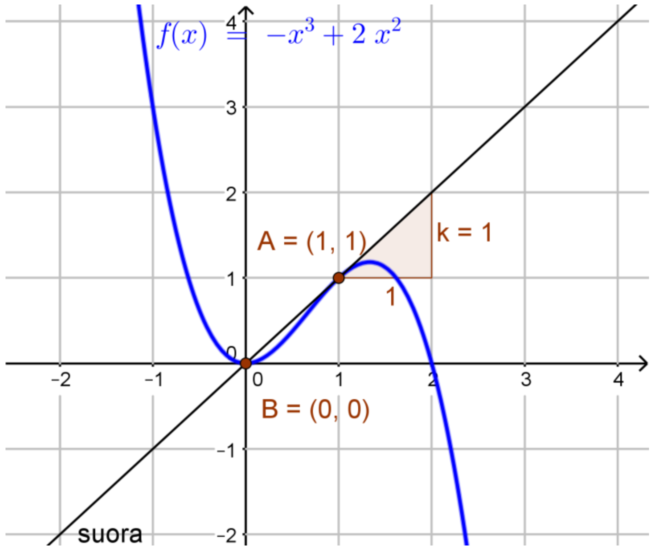
Siis, suoran pisteiden $P = (x,y)$ x-koordinaatti kuuluu välille $]0,2[$. **(2p)**

c) Edelleen, koska $k = \frac{-x^3+2x^2-0}{x-0} = -x^2 + 2x$, niin millä x:n arvolla lauseke $-x^2 + 2x$ saa suurimman arvonsa? Lauseke vastaa alaspäin aukeavaa paraabelia, joten sen huipusta löytyy max-arvo. Huipun x-koordinaatin arvo on nollakohtien keskiarvo, siis

$$x_{\max k} = \frac{0 + 2}{2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$$

Siis, piste $P = (1,1)$. **(2p)**





/6
/24