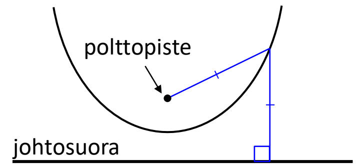
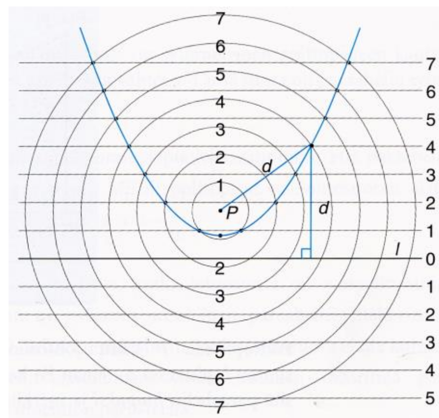
ANALYYTTINEN GEOMETRIA MAA4

Paraabeli

Määritelmä, Paraabeli:
Paraabeli on tason niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä annetusta suorasta, *johtosuorasta* ja sen ulkopuolella olevasta pisteestä, *polttopisteestä*.



Esimerkki 1 Paraabelin uraominaisuuden toteuttavia pisteitä löydetään piirtämällä polttopiste keskipisteenä samankeskisiä ympyröitä ja johtosuoran suuntaisia suoria.



Esimerkki 2 Paraabelin polttopiste on $(0,-1)$ ja johtosuora $y=1$. Määritä paraabelin yhtälö.

Pisteen (x,y) etäisyys polttopisteestä on $\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}$ ja etäisyys johtosuorasta $y=1$ on $|y-1|$. Näin ollen paraabelin yhtälöksi saadaan

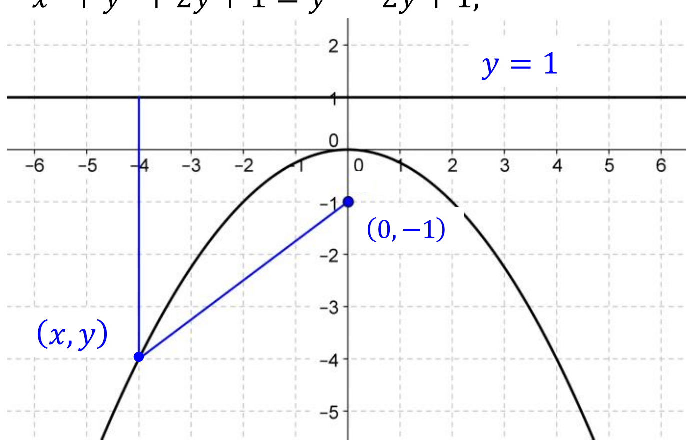
$$\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}=|y-1|$$

Molemmat puolet pos. → korotetaan $\uparrow^2$

$$x^2+y^2+2y+1=y^2-2y+1,$$

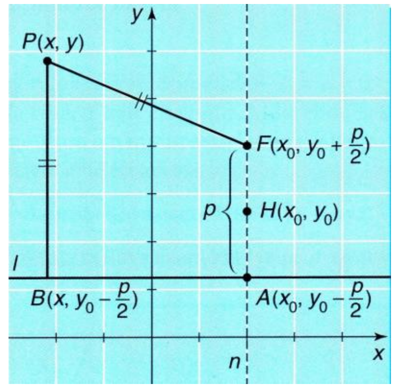
josta $y=-\frac{1}{4}x^2$.

Tämä on kysytty yhtälö.



Paraabelin yhtälö:
Olkoon polttopisteen etäisyys johtosuorasta p $(p > 0)$. Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon siten, että johtosuora l on x-akselin suuntainen ja polttopiste F on johtosuoran yläpuolella.

F:n kautta kulkeva johtosuoran normaali n leikkaa johtosuoran l pisteessä A. Tällöin piste H (janan FA keskipiste) on paraabelin piste (määritelmä).



Tätä pistettä sanotaan paraabelin *huipuksi*, merkitään $H = (x_0, y_0)$.
Koska H on janan FA kp, niin $F = \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$ ja $A = \left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right)$.
Johtosuoran yhtälö on $y = y_0 - \frac{p}{2}$.
Pisteen $P = (x, y)$ etäisyys johtosuorasta on $PB = \left|y - y_0 + \frac{p}{2}\right|$ ja polttopisteestä $PF = \sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)^2}$.

Nyt paraabelin yhtälö on $PF = PB$. Siis

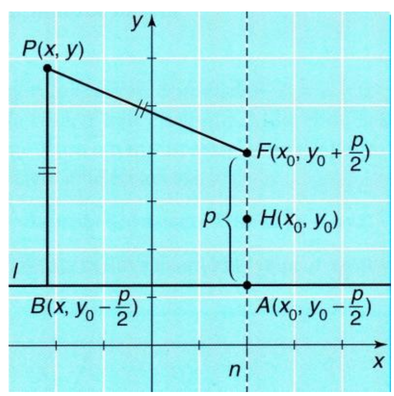
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y - y_0 + \frac{p}{2}\right|.$$

Kuten edellä, korotetaan toiseen potenssiin, saadaan:

$$(x - x_0)^2 + \left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y - y_0 + \frac{p}{2}\right)^2$$

eli

$$(x - x_0)^2 = \overbrace{\left(y - y_0 + \frac{p}{2}\right)}^{a}{}^2 - \overbrace{\left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)}^{b}{}^2.$$

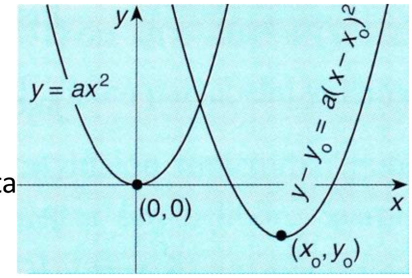


Mutta tässähän on neliöiden erotus: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Siis

$$(x - x_0)^2 = \left(y - y_0 + \frac{p}{2} + y - y_0 - \frac{p}{2}\right)\left(y - y_0 + \frac{p}{2} - y + y_0 + \frac{p}{2}\right).$$

Edelleen $(x - x_0)^2 = (2y - 2y_0)p = 2p(y - y_0)$ ja lopulta

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2, \qquad \text{missä } a = \frac{1}{2p}.$$



Lause, paraabelin yhtälö:
Sellaisen paraabelin, jonka
1. huippu on (x_0, y_0),
2. akseli on y-akselin suuntainen ja
3. polttopisteen etäisyys johtosuorasta on p,

yhtälö on $\quad y - y_0 = a(x - x_0)^2$,

missä $a = \frac{1}{2p}$, kun paraabeli aukeaa ylöspäin ja $a = -\frac{1}{2p}$, kun paraabeli aukeaa alaspäin.

Huom. Jos paraabelin huippu on origo ja akseli on y-akseli, niin paraabelin yhtälö sievenee muotoon $y = ax^2$.

Esimerkki Paraabeli on yhtenevä paraabelin $y = 2x^2$ kanssa ja sen akseli on y-akselin suuntainen. Määritä paraabelin yhtälö, kun huippu on $(2, -1)$.
Yhtälö on muotoa $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, jossa $a = 2$ (yhtenevyys). Sijoitetaan tieto $(x_0, y_0) = (2, -1)$, saadaan

$$y - (-1) = 2(x - 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x^2 - 8x + 7.$$

Esimerkki Määritä paraabelin $y = 2x^2 - 8x + 16$ huippu.
Yhtälö pitää muuttaa muotoon $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, josta huipun koordinaatit (x_0, y_0) saadaan. Menetelmä on neliöön täydentäminen.

$$y = 2x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 8x + 8 + 8$$
$$= 2(x^2 - 4x + 4) + 8 = 2(x - 2)^2 + 8$$

Näin ollen

$$y - 8 = 2(x - 2)^2 \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0) = (2{,}8).$$

Lause, Paraabelin $\boldsymbol{y - y_0 = a(x - x_0)^2}$ ominaisuuksia:

1. Huippu on (x_0, y_0).
2. Akseli on y-akselin suuntainen suora $x = x_0$.
3. Paraabeli aukeaa ylöspäin, kun $a > 0$, ja alaspäin, kun $a < 0$.

Esimerkki Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ huippu ja johtosuora.

Huipun määrittämiseksi kirjoitetaan yhtälö $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ muotoon $y - 3 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x)$. Täydennetään neliöksi, saadaan

$$y - 3 {\color{red}+ 2} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x {\color{red}+ 4}) \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)^2.$$

Siis, huippu on $(2, 1)$. Koska $a = \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$, niin $p = 1$ ja $\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$.

Paraabelin akseli on y-akselin suuntainen, joten polttopiste on

$$\left(2, 1 + \tfrac{1}{2}\right) = \left(2, 1\tfrac{1}{2}\right), \qquad \left(\text{miksi } + \tfrac{1}{2} \text{ eikä } - \tfrac{1}{2}\,?\right)$$

ja johtosuoran yhtälö on

$$y = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Paraabelin yhtälö $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Kääntäen jokainen muotoa $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ oleva yhtälö voidaan neliöksi täydentämällä kirjoittaa muotoon

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2.$$

Esimerkki Määritä paraabelin $y = 2x^2 - 6x + 5$ huippu.

TAPA 1 Neliöksi täydentäminen

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x + 5 \\ y - 5 &= 2(x^2 - 3x) = 2\left(x^2 - 2 \cdot \tfrac{3}{2}x\right) \\ y - 5 {\color{red}+ \tfrac{9}{2}} &= 2\left(x^2 - 3x {\color{red}+ \tfrac{9}{4}}\right) \\ y - \tfrac{1}{2} &= 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

TAPA 2 Nollakohtien avulla.

Yhtälöllä $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ei ole (reaalisia) ratkaisua, koska diskriminantti $D = 36 - 40 = -4 < 0$. Siksi tätä menetelmää ei voi käyttää.

TAPA 3 Symmetristen pisteiden avulla.

Etsitään ne paraabelin $y = 2x^2 - 6x + 5$ pisteet, joiden y-koordinaatti on 5. Näissä pisteissä pätee $2x^2 - 6x + 5 = 5$ eli $2x(x - 3) = 0$.

TAPA 3 (jatkuu)
Saadaan $x = 0$ tai $x = 3$. Pisteet $(0,5)$ ja $(3,5)$ ovat symmetriset paraabelin akselin suhteen, joten huipun x-koordinaatti on

$$x = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad y = 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \tfrac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2}.$$

TAPA 4 Differentiaalilaskenta → kurssi 7

Paraabelin sekantti ja tangentti
Kuten ympyrän tapauksessa: Sekantilla ja paraabelilla on kaksi yhteistä pistettä, tangentilla ja paraabelilla yksi yhteinen piste. Sekantti *leikkaa* ja tangentti *sivuaa*. *Nämä yhteiset pisteet määritetään ratkaisemalla suoran ja paraabelin muodostama yhtälöpari.*

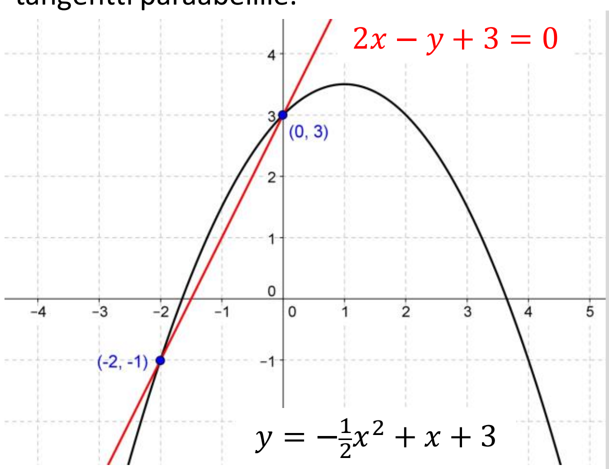
Esimerkki Missä pisteissä suora $2x - y + 3 = 0$ leikkaa paraabelin.
a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$ **b)** $y = 4x^2 + 2x + 3$.
a) Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenettelyllä, saadaan $y = 2x + 3$

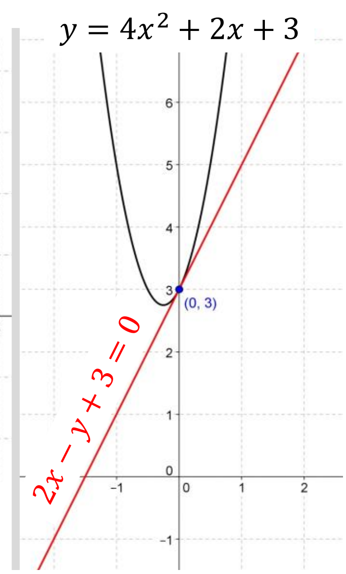
$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3 \end{cases} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \lor x = -2 \\ y = 3 \ \lor y = -1 \end{cases}.$$

b) Kuten a)-kohdassa, koska $y = 2x + 3$, niin on

$$2x + 3 = 4x^2 + 2x + 3 \iff 4x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ ja } y = 3.$$

Siis suoralla ja paraabelilla on yksiyhteinen piste. Suora on näin ollen tangentti paraabelille.





Paraabeli $\boldsymbol{x = ay^2 + by + c}$
Vaihtamalla paraabelin yhtälössä $y = ax^2 + bx + c$ muuttujien x ja y paikat, saadaan yhtälö

$$x = ay^2 + by + c.$$

Tämän yhtälön kuvaaja on paraabeli, jonka akselina on x-akselin suuntainen suora. Paraabeli aukeaa oikealla, kun $a > 0$, ja vas., kun $a < 0$.

Paraabelit

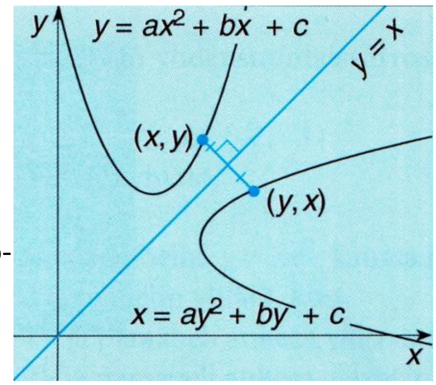
$$y = ax^2 + bx + c$$

ja

$$x = ay^2 + by + c$$

ovat yhteneviä.

Ne saadaan toisistaan peilaamalla suoran $y = x$ suhteen.



Esimerkki Määritä paraabelin $x = y^2 - 3y + 2$ ja y-akselin leikkauspisteet sekä paraabelin huippu. Piirrä paraabeli.

Leikkauspisteissä pätee $x = 0$, joten $y^2 - 3y + 2 = 0$, josta $y = 1$ tai $y = 2$. Leikkauspisteet ovat $(0, 1)$ ja $(0, 2)$.
Symmetrian nojalla huipun y-koordinaatti on $y = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ja x-koordinaatiksi tulee $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$. Joten huippu on $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$.