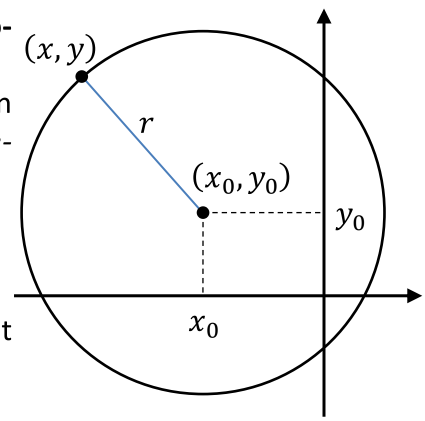
Ympyrän yhtälö

ANALYYTTINEN GEOMETRIA MAA4

On melko selvää, että origokeskisen ja r-säteisen ympyrän yhtälö voidaan esittää muodossa $x^2 + y^2 = r^2$. Vastaavalla tavalla muodostetaan ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $P_0 = (x_0, y_0)$ ja säde r.

Lause, Ympyrän yhtälö keskipistemuodossa:
Ympyrän (kehän), jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja säde r, yhtälö *keskipistemuodossa* on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



Ympyrän $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ sisäpuolisen alueen pisteet toteuttavat epäyhtälön

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

ja ulkopuoliset pisteet vast. epäyhtälön $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$.

Esimerkki **a)** Origokeskisen yksikköympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 1$.
b) Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(-2,1)$ ja joka kulkee pisteen $(-5,5)$ kautta.
c) Kuten b)-kohdassa, mutta nyt sivuaa suoraa $2x - y + 15 = 0$.

b) Ympyrän säde on pisteiden $(-2,1)$ ja $(-5,5)$ välinen etäisyys, eli

$$r = \sqrt{\left(-5 - (-2)\right)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

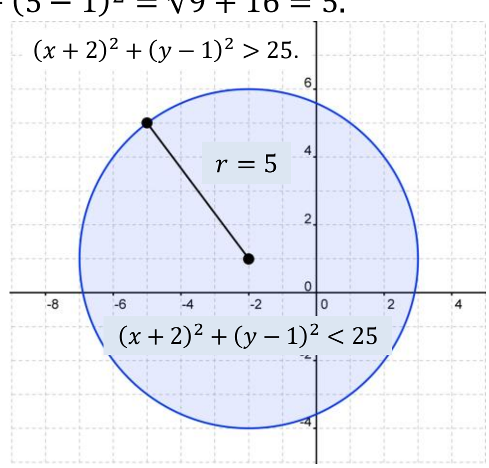
Sijoitetaan ympyrän yhtälöön $x_0 = -2$, $y_0 = 1$ ja $r = 5$, saadaan

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Aukaisemalla sulut voidaan yhtälö kirjoittaa muodossa

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$$

Ylempi muoto on ympyrän keskipistemuoto ja alempi on ympyrän yleinen muoto.



c) Ympyrän säde on nyt keskipisteen $(-2{,}1)$ etäisyys suorasta $2x - y + 15 = 0$. Siis

$$r = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Ympyrän yhtälöksi saadaan

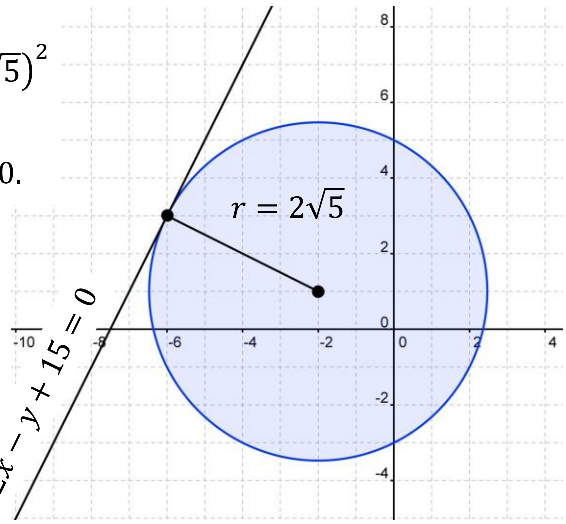
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$

eli

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20.$$

Yleisessä muodossa:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0.$$



Edellä on ympyrän yhtälöstä edetty toiseen muotoon aukaisemalla sulut. Siis ympyrän keskipistemuodosta $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ saadaan

$$x^2 - 2xx_0 + {x_0}^2 + y^2 - 2yy_0 + {y_0}^2 - r^2 = 0$$

ja termien järjestelyn jälkeen

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2 = 0.$$

Kun vielä merkitään $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ ja $c = {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2$, niin on saatu ympyrän polynomimuoto, jota myös yleiseksi muodoksi sanotaan.

Lause, Ympyrän yhtälö polynomimuodossa/ yleisessä muodossa:
Jokaisen ympyrän yhtälö voidaan kirjoittaa *polynomi- eli yleiseen muotoon*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

missä a, b ja c ovat reaalilukuja.
Käänteisesti, tämän yhtälön kuvaaja, mikäli se on olemassa, on aina ympyrä (kehä) tai piste. Keskipistemuodosta saadaan suoralla laskulla polynomimuoto. Pol.-muodosta kp-muotoon päästään neliöön täyden.

Esimerkki 1 Tutki yhtälön $x^2 + y^2 - 6x + 8y + c = 0$ kuvaajaa parametrin c eri arvoilla.
Muutetaan ensin polynomimuodosta keskipistemuotoon.

Alkuperäinen yhtälö: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + c = 0$
Siirretään vakiotermi oik. puol.: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = -c$
Vaihdetaan termien järjestystä: $x^2 - 6x + y^2 + 8y = -c$
Täydennetään neliöksi: $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -c + 25$
Binomin neliö: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 - c$

Tapauksessa $c < 25$ kuvaaja on ympyrä, jonka keskipiste on $(3, -4)$ ja säde $r = \sqrt{25 - c}$.
Tapauksessa $c = 25$ yhtälöä on muotoa $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 0$, eli kyseessä on keskipiste $(3, -4)$. Siis, keskipisteen koordinaatit ovat ainoat koordinaatit, jotka toteuttavat yhtälön.
Tapauksessa $c > 25$ yhtälöllä $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 - c$ ei ole reaalisia ratkaisuja, sillä yhtälön vasemmalla puolella on neliöiden summa (aina ei-negatiivista) ja oikealla puolella jotain negatiivista, RR.

Esimerkki 2 Määritä pisteiden $A = (6,3)$, $B = (2,5)$ ja $C = (-6,-1)$ kautta kulkevan ympyrän yhtälö.
TAPA 1: Ympyrän yhtälöä on muotoa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, joten ympyrän (eli ympyräkehän) pisteiden on toteutettava yhtälö. Muodostuu yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 6^2 + 3^2 + 6a + 3b + c = 0 \\ 2^2 + 5^2 + 2a + 5b + c = 0 \\ (-6)^2 + (-1)^2 - 6a - 1b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 3b + c = -45 \\ 2a + 5b + c = -29 \\ 6a + b - c = 37 \end{cases},$$

josta ylin ja alin yhtälö yhteenlaskettuna antaa

$$12a + 4b = -8 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + b = -2.$$

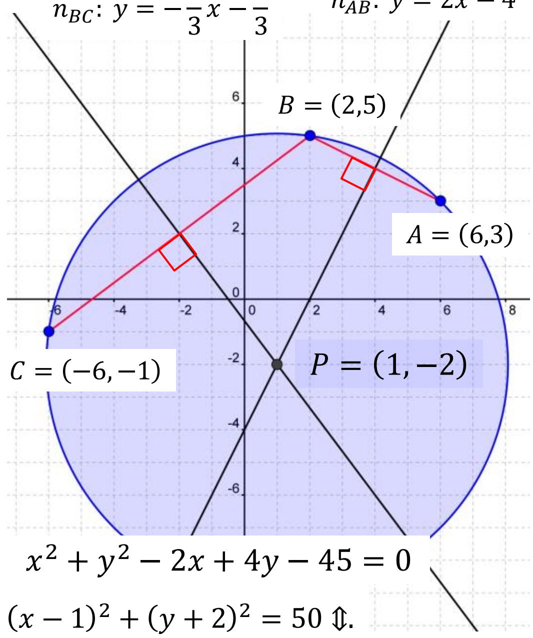
Vastaavasti keskimmäisen ja alimman yhtälön summa tuottaa yhtälön

$$8a + 6b = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 3b = 4.$$

Muodostuvan yhtälöparin $\begin{cases} 3a + b = -2 \\ 4a + 3b = 4 \end{cases}$ ratkaisuna on $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$. Sijoitetaan a ja b esimerkiksi yhtälöön $6a + b - c = 37$, niin vakio c saa arvon $-12 + 4 - c = 37 \Rightarrow c = -45$.
Kysytty yhtälö on siis

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 45 = 0.$$

TAPA 2: Ympyrän keskipiste on jänteiden AB ja BC keskinormaalien leikkauspisteessä (3.kurssi).



Jänteen AB keskipiste on $(4,4)$ ja kulmakerroin $-\frac{1}{2}$, joten keskinormaalin n_{AB} yhtälöksi saadaan

$$y - 4 = 2(x - 4)$$

$$\Rightarrow \quad y = 2x - 4.$$

Vastaavalla tavalla jänteen BC keskinormaali n_{BC} on

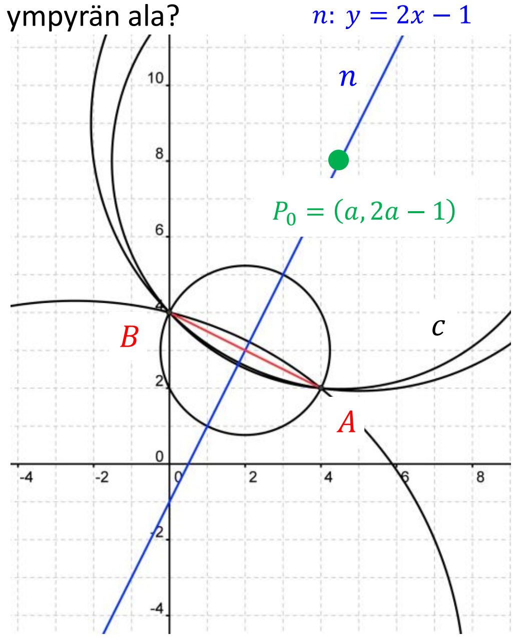
$$y - 2 = -\tfrac{4}{3}(x + 2)$$

$$\Rightarrow \quad y = -\tfrac{4}{3}x - \tfrac{2}{3}.$$

Keskinormaalit leikkaavat pisteessä $P = (1,-2)$. Ympyrän säteen neliöksi saadaan 50, joten kysytyksi yhtälöksi tulee $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 50 \Updownarrow$.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 45 = 0$$

Esimerkki(haastava) **a)** Määritä kaikkien niiden ympyröiden yhtälöt, jotka kulkevat pisteiden $A = (4,2)$ ja $B = (0,4)$ kautta.
b) Mikä on pienimmän tällaisen ympyrän ala?



a) Olkoon c tällainen ympyrä. Koska sen keskipiste on janan AB keskinormaalilla n (kuva), määritetään ensin suoran n yhtälö.

Janan AB kk. on $\frac{4-2}{0-4} = -\frac{1}{2}$, joten suoran n kk. on 2. Lisäksi suora n kulkee janan AB keskipisteen $(2,3)$ kautta, joten suoran n yhtälö on

$$y - 3 = 2(x - 2), y = 2x - 1.$$

Ympyrän c keskipiste on siis

$$P_0 = (a, 2a - 1).$$

Tämän ympyrän säde r saadaan määritettyä keskipisteen P_0 etäisyydestä pisteeseen B (tai A)

$$r^2 = (a-0)^2 + (2a-1-4)^2$$
$$= 5a^2 - 20a + 25.$$

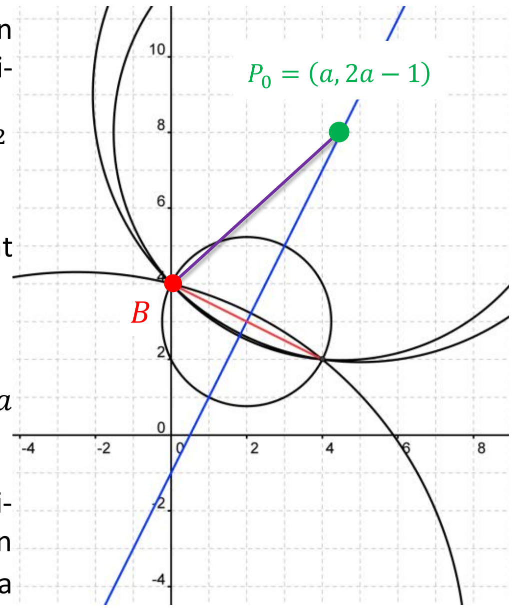
Kysytyt ympyrän yhtälöt ovat näin ollen muotoa

$$(x-a)^2 + (y-2a+1)^2$$
$$= 5a^2 - 20a + 25,$$

missä muuttuja eli parametri a saa kaikki reaaliarvot.

b) Pienimmän ympyrän halkaisija on jana AB, jonka pituus on $2\sqrt{5}$. Säde r on näin ollen $\sqrt{5}$ ja pinta-ala

$$A_{\text{ymp.}} = \pi r^2 = 5\pi$$



Ympyräparvi
$(x-a)^2 + (y-2a+1)^2 = 5a^2 - 20a + 25$