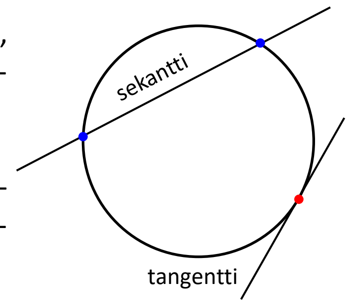
Ympyrän sekantti ja tangentti

ANALYYTTINEN GEOMETRIA MAA4

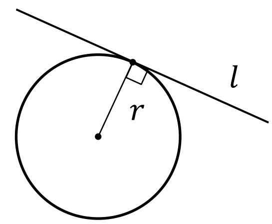
Kertausta Ympyrän sekantti on *suora*, jolla on kaksi yhteistä pistettä ympyrän (kehän) kanssa. Sekantti *leikkaa* ympyrää.

Ympyrän tangentti on *suora*, jolla on yksi yhteinen piste ympyrän (kehän) kanssa. Tangentti *sivuaa* ympyrää.



Lause, tangentin ominaisuuksia:

1. Ympyrän tangentilla on täsmälleen yksi yhteinen piste ympyrän kanssa (määritelmä).
2. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteen kautta kulkevaa sädettä vastaan.
3. Ympyrän keskipiste on säteen etäisyydellä tangentista.



Siis etäisyys…kohtisuorassa…voidaan hyödyntää aiempia tuloksia!

Esimerkki 1 Missä pisteessä (pisteissä) suora $x+y-1=0$ leikkaa ympyrän $x^2+y^2=5$?

Ratkaistaan yhtälöpari (2 tuntematonta eli x ja y sekä 2 yhtälöä).

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \implies \begin{cases} y=1-x \ \downarrow \text{sij.} \\ x^2+\underbrace{(1-x)^2}_{1-2x+x^2}=5 \end{cases}$$

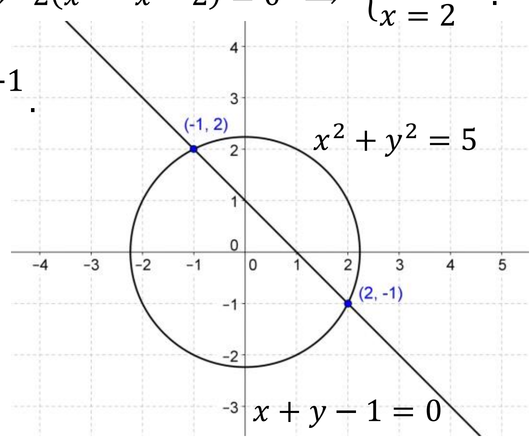
$$\implies 2x^2-2x-4=0 \implies 2(x^2-x-2)=0 \implies \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Ja tällöin

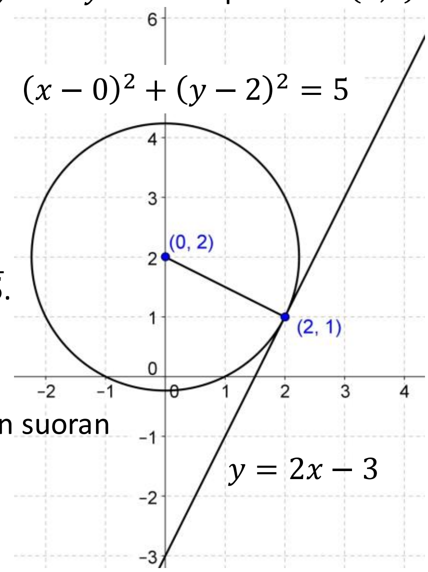
$$\begin{cases} y=2, & \text{kun } x=-1 \\ y=-1, & \text{kun } x=2 \end{cases}.$$

Leikkauspisteet:

$(-1,2)$ ja $(2,-1)$.



Esimerkki 2 Määritä ympyrän $x^2+y^2-4y-1=0$ pisteestä $(2{,}1)$ piirretyn tangentin yhtälö.



(Aluksi ympyrän keskipistemuoto)

$$x^2+y^2-4y-1=0$$

$$(x-0)^2+y^2-4y+4-1=4$$

$$(x-0)^2+(y-2)^2=5$$

Siis, keskipiste on $(0{,}2)$ ja säde $r=\sqrt{5}$.
Piste $(2{,}1)$ on ympyrän kehällä, sillä

$$2^2+1^2-4\cdot 1-1=0.$$

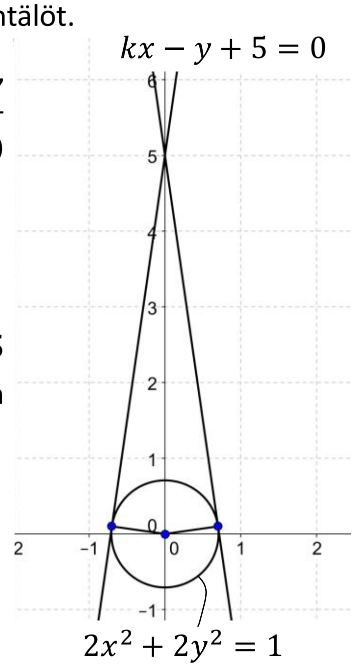
Pisteiden $(0{,}2)$ ja $(2{,}1)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin

$$k_1=\frac{1-2}{2-0}=-\frac{1}{2}.$$

Näin ollen tangentin kk. $k_2=-\frac{1}{k_1}=2$ ja tangentin yhtälöksi tulee

$$y-1=2(x-2) \quad\Leftrightarrow\quad y=2x-3 \quad\Leftrightarrow\quad -2x+y+3=0.$$

Esimerkki 3 (vrt. kirjan esim. 3) Määritä pisteestä $(0{,}5)$ ympyrälle $2x^2+2y^2=1$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt.



Pisteessä $(0{,}5)$ on $2\cdot 0^2+2\cdot 5^2=50>1$, eli piste $(0{,}5)$ on ympyrän kehän ulkopuolella. Koska tangentti kulkee pisteen $(0{,}5)$ kautta, sen yhtälöksi tulee

$$y-5=k(x-0) \quad\Leftrightarrow\quad kx-y+5=0,$$

missä k on kulmakerroin.

Ympyrän $2x^2+2y^2=1$, eli $x^2+y^2=0{,}5$ kp on $(0{,}0)$ ja säde $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Koska keskipiste on säteen etäisyydellä tangentista, niin suora

$$kx-y+5=0$$

on tangentti, kun

$$\frac{|k\cdot 0-1\cdot 0+5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Saatu yhtälö sievenee muotoon

$$5\sqrt{2} = \sqrt{k^2 + 1}.$$

Tämän yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia aina, joten toiseen korotus antaa (ja kulmakertoimeksi k tulee)

$$50 = k^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad k^2 = 49 \quad \Longrightarrow \quad k = \pm 7.$$

Sijoitetaan kulmakertoimien arvot jolloin tangenttien yhtälöiksi tulee

$$7x - y + 5 = 0 \quad \text{ja} \quad -7x - y + 5 = 0.$$