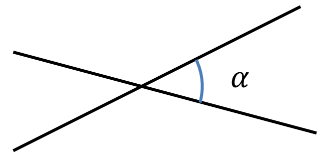
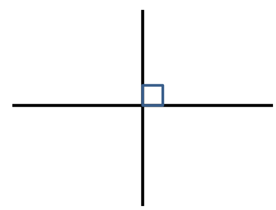
Suorien kohtisuoruus ja pisteen etäisyys suorasta

Kahden suoran välinen kulma on suorien leikkauspisteeseen muodostuvista kulmista pienin (siis terävä kulma).



Jos suorat ovat yhdensuuntaiset tai yhtyvät, niiden väliseksi kulmaksi sovitaan nolla astetta.

Erikoistapauksena suorien välinen kulma voi olla 90 astetta (jolloin kaikki leikkauspisteen neljä kulmaa ovat yhtä suuret.)

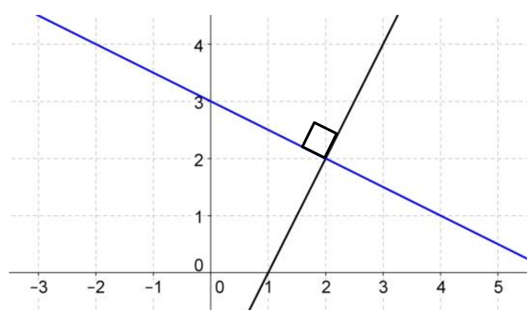


Suorien väliselle kulmalle saadaan aina ehto

$$0° \leq \alpha \leq 90°.$$

Lause, Suorien kohtisuoruus: Suorat ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos niiden kulmakertoimien tulo on -1 **tai** toinen suora on x-akselin ja toinen y-akselin suuntainen.

Todistus Sivuutetaan.



Suorat $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos $k_1k_2 = -1$.

Esimerkki 1 Osoita, että suorat $3x - 2y + 1 = 0$ ja $4x + 6y - 5 = 0$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Edellisen suoran kulmakerroin on $\frac{3}{2}$ ja jälkimmäisen $-\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$. Kulmakertoimien tulo on $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, joten suorat ovat kohtisuorassa.

Lauseesta havaitaan, että suoran $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ normaalin kulmakerroin on kohtisuoruusehdon nojalla $-\frac{1}{k}$.

Esimerkki 2 Määritä pisteestä $(-2,3)$ suoralle $3x - 4y - 12 = 0$ piirretyn normaalin yhtälö.

Suoran kulmakerroin on $\frac{3}{4}$, joten normaalin kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$. Koska normaali kulkee pisteen $(-2,3)$ kautta, sen yhtälö on

$$y - 3 = -\frac{4}{3}\big(x - (-2)\big) \iff y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \iff 4x + 3y - 1 = 0.$$

Esimerkki 3 Määritä pisteiden $A = (0, -5)$ ja $B = (2, -1)$ määräämän janan keskinormaalin yhtälö.

Tapa 1 Keskinormaali on kohtisuorassa suoraa AB vastaan ja kulkee janan AB keskipisteen $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-5-1}{2}\right) = (1, -3)$ kautta.
Edelleen, koska suoran AB kulmakerroin on $\frac{-1+5}{2-0} = 2$, normaalin kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$. Näin ollen saadaan normaalin yhtälö

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \iff y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \iff x + 2y + 5 = 0\,.$$

Tapa 2 Janan keskinormaali on (3. kurssin nojalla) on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana molemmista janan päätepisteistä. Merkitään yhtä suuriksi normaalin pisteen (x, y) etäisyyden neliöt pisteistä A ja B, jolloin saadaan yhtälö:

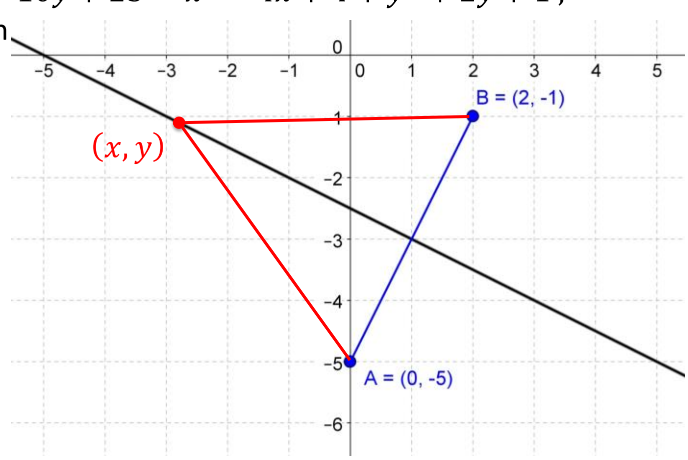
$$x^2 + (y+5)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2\,,$$

joka sievenee muotoon

$$x^2 + y^2 + 10y + 25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1\,,$$

ja lopulta muotoon

$$x + 2y + 5 = 0\,.$$



Pisteen etäisyys suorasta

Lause:
Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta

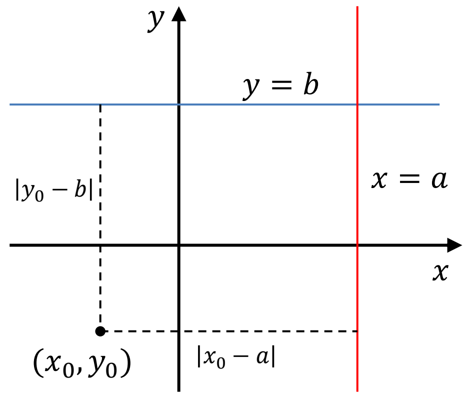
$$ax + by + c = 0$$

(missä $a \neq 0$ tai $b \neq 0$) on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Todistus: Myöhemmin, kurssi 5.

Huom1: Suora pitää olla yleisessä muodossa $ax + by + c = 0$, josta kertoimet a, b ja c otetaan.



Huom2/Esim.: Yleisesti pisteen (x_0, y_0) etäisyys akselin suuntaisesta suorasta $x = a$ (vastaavasti $y = b$) on

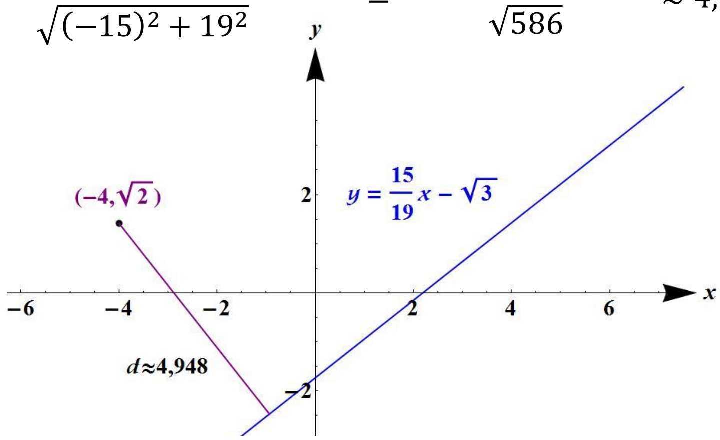
$$|x_0 - a| \qquad (\text{vastaavasti } |y_0 - b|).$$

Esimerkki 1: Laske pisteen $\left(-4, \sqrt{2}\right)$ etäisyys suorasta $y = \frac{15}{19}x - \sqrt{3}$.
Muutetaan suora ensin yleiseen muotoon

$$y = \frac{15}{19}x - \sqrt{3} \quad \overset{|\cdot 19}{\Leftrightarrow} \quad -15x + 19y + 19\sqrt{3} = 0,$$

ja sijoitetaan kaavaan:

$$d = \frac{\left|-15 \cdot (-4) + 19 \cdot \sqrt{2} + 19\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(-15)^2 + 19^2}} = \frac{60 + 19\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{586}} \approx 4{,}94.$$



Esimerkki 2: Määritä suorasta $-x + 2y - 5 = 0$ ne pisteet, joiden etäisyys suorasta $-8x - 6y + 3 = 0$ on 4?

Suoran ratkaistu muoto on $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Koska tarkasteltava piste (x_0, y_0) on tällä suoralla, niin se toteuttaa suoran yhtälön. Näin ollen

$$y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2}, \qquad \text{ja} \qquad (x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2}\right).$$

Sijoitetaan tunnetut tiedot etäisyysyhtälöön $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ole huolellinen minkä suoran kertoimet a, b ja c sijoitat!

$$4 = \frac{\left|-8 \cdot x_0 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2}\right) + 3\right|}{\sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}} = \frac{|-8x_0 - 3x_0 - 15 + 3|}{\sqrt{64 + 36}}$$

$$= \frac{|-11x_0 - 12|}{\sqrt{100}} = \frac{|-11x_0 - 12|}{10} \implies 10 \cdot 4 = |-11x_0 - 12|.$$

Saadaan kaksi vaihtoehtoa: $-11x_0 - 12 = 40$ ja $-11x_0 - 12 = -40$.

<u>**Vaihtoehto 1 ”+40”:**</u> Ratkaistaan pisteen koordinaatit.

$$-11x_0 - 12 = 40 \implies x_0 = \frac{40 + 12}{-11} = -\frac{52}{11} \qquad \text{ja}$$

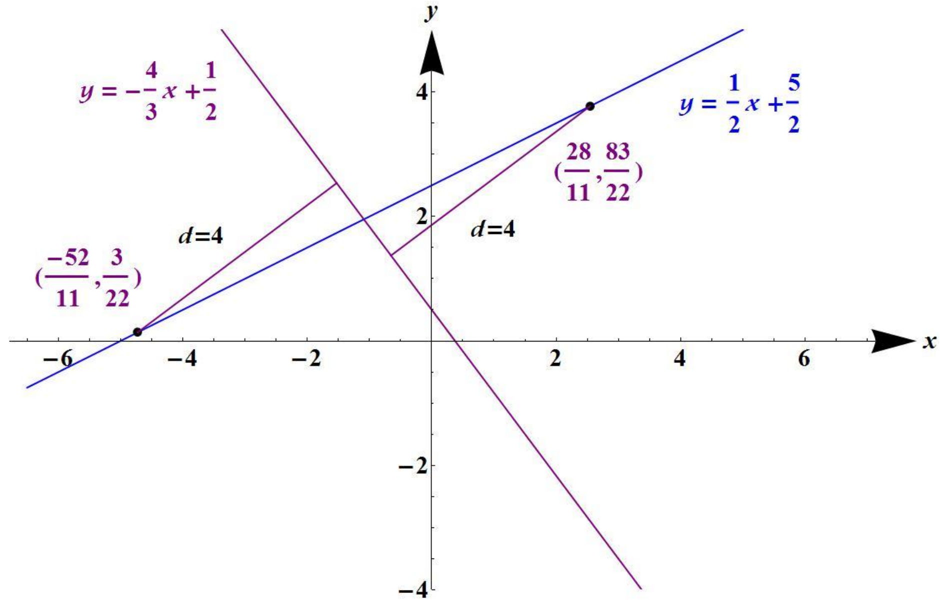
$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{52}{11}\right) + \frac{5}{2} = \frac{3}{22} \implies \text{Piste on } \left(-\frac{52}{11}, \frac{3}{22}\right)$$

<u>**Vaihtoehto 2 ”-40”:**</u> Ratkaistaan pisteen koordinaatit. Nyt

$$-11x_0 - 12 = -40 \implies x_0 = \frac{-40 + 12}{-11} = \frac{28}{11} \qquad \text{ja}$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{28}{11}\right) + \frac{5}{2} = \frac{83}{22} \implies \text{Piste on } \left(\frac{28}{11}, \frac{83}{22}\right)$$

Löydettiin kaksi ratkaisua!



Esimerkki 3 (kuten kirjan esim 3., sivu 151):
Määritä suorien $4x - 3y - 6 = 0$ ja $-3x + 5 = 0$ välisen kulman puolittajan yhtälö.

Määritelmän mukaan kulmanpuolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä. Merkitään siis yhtä suuriksi pisteen (x, y) etäisyydet suorista

$4x - 3y - 6 = 0$ ja $-3x + 5 = 0$.

Saadaan

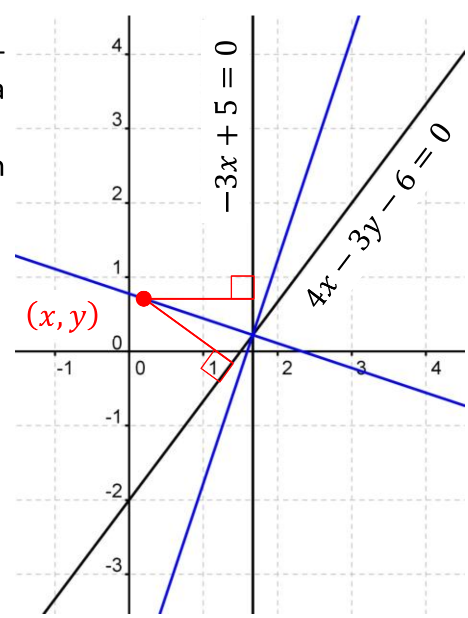
$$\frac{|4x - 3y - 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-3x + 5|}{\sqrt{(-3)^2}}$$

eli

$$\frac{|4x - 3y - 6|}{5} = \frac{|-3x + 5|}{3}$$

$$3 \cdot |4x - 3y - 6| = 5 \cdot |-3x + 5|$$

$$|12x - 9y - 18| = |-15x + 25|$$



Itseisarvoyhtälöthän toteutuvat jos ja vain jos

$$12x - 9y - 18 = -15x + 25$$

tai

$$12x - 9y - 18 = 15x - 25.$$

Edellisestä yhtälöstä saadaan

$$27x - 9y - 43 = 0$$

ja jälkimmäisestä

$$3x + 9y - 7 = 0.$$