Kahden suoran leikkauspiste ja välinen kulma (suoraparvia)

Piste (x_0, y_0) on suoralla, jos sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

Esimerkki Olkoon suora $-2x + y + 8 = 0 \iff y = 2x - 8$. Piste $(-5,2)$ ei ole suoralle koska

$$2 \neq 2 \cdot (-5) - 8 = -18,$$

mutta piste $(5,2)$ on, sillä $2 = 2 \cdot (5) - 8 = 10 - 8 = 2$.

Vastaavalla idealla, kahden suoran leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat nyt kummankin suoran yhtälöt.

Yleisesti, kaksi suoraa voivat

- leikata toisensa, löytyy yksi yhteinen piste eli leikkauspiste,
- olla yhdensuuntaisia ja erillisiä, ei yhtään yhteistä pistettä tai
- yhtyä yhdeksi suoraksi, jolloin ∞ määrä yhteisiä pisteitä.

Suorien yhteiset pisteet (esim. leikkauspiste) löydetään ratkaisemalla suorien yhtälöistä muodostuva 1. asteen *lineaarinen yhtälöpari* (useampi muoto)

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = ax + b \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = ax + b \\ y = dx + e \end{cases}$$

Eli suora saa olla yleisessä tai ratkaistussa muodossa, ei väliä.

Yhtälöparin voi ratkaista *algebrallisesti* joko sijoituskeinolla tai yhteenlaskukeinolla. Yhtälöparin voi ratkaista myös *graafisesti* eli piirtämällä suorat koordinaatistoon ja määrittämällä leikkauspisteen koordinaatit, tosin graafinen ratkaisutapa ei ole tarkka.

Esimerkki Kolmion kärjet ovat seuraavilla suorilla $3x - 2y + 1 = 0$, $y = -x + 2$ ja $x + 5 = 0$. Määritä kolmion kärkipisteet.

Kolmion kärjet ovat suorien leikkauspisteissä. Muodostuu kolme yhtälöparia, ratkaistaan nämä:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = -x + 2 \\ x + 5 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Käytetään sijoituskeinoa, saadaan

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ y = -x + 2, \quad \uparrow \text{ sij.} \end{cases} \implies 3x - 2(-x + 2) + 1 = 0$$

$$\implies 3x + 2x - 4 + 1 = 5x - 3 = 0 \implies x = \frac{3}{5} \text{ ja } y = -\frac{3}{5} + 2 = \frac{7}{5}.$$

Vastaavasti

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x + 5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y + 2 \quad \downarrow \text{ sij.} \\ x + 5 = 0 \end{cases} \implies -y + 2 + 5 = 0$$

$$\implies y = 7 \text{ ja } x = -5 \text{ (suoraan alemmasta yhtälöstä).}$$

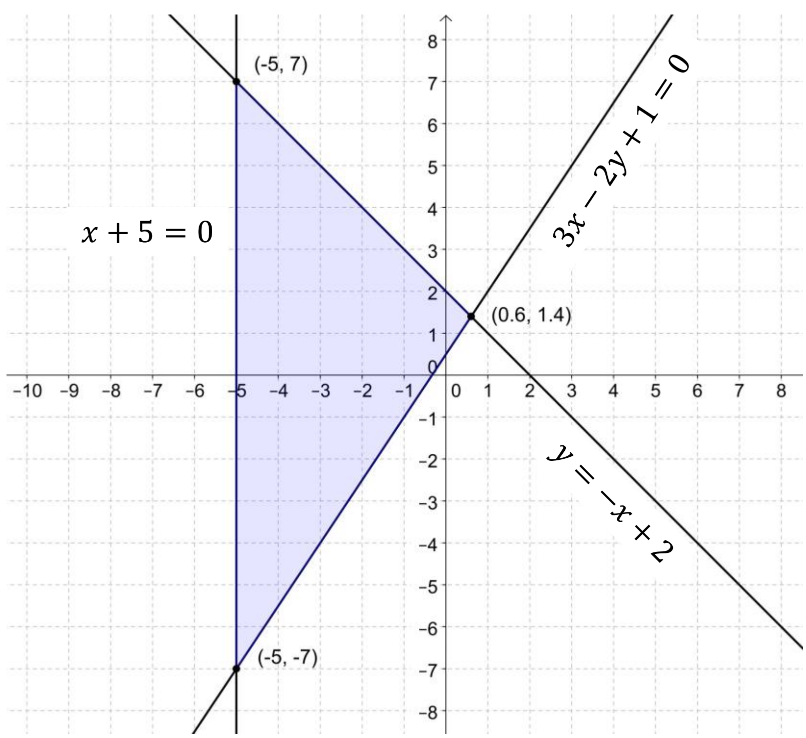
ja

$$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -5 \quad \downarrow \text{ sij.} \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies 3 \cdot (-5) - 2y + 1 = 0$$

$$\implies -2y = 14 \implies y = -7 \text{ ja } x = -5.$$

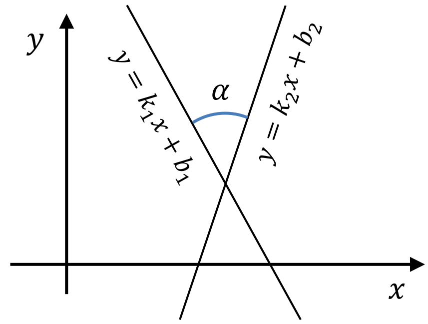
Siis, leikkauspisteet ovat (kuva seuraavalla dialla):

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right), \quad (-5, 7), \quad (-5, -7).$$



Suorien välinen kulma yleisesti määritetään kulmakertoimien avulla.

Lause, Suorien välinen kulma:
Olkoon α suorien $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ välinen kulma.



Kun $\alpha < 90°$, niin

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Todistus Sivuutetaan /HT.

Esimerkki Kahdesta suorasta toinen kulkee pisteiden $(22,13)$ ja $(47,58)$ kautta ja toinen suora pisteiden $(15,65)$ ja $(51,17)$ kautta. Laske suorien välinen kulma asteen tarkkuudella.

Suorien kulmakertoimet ovat

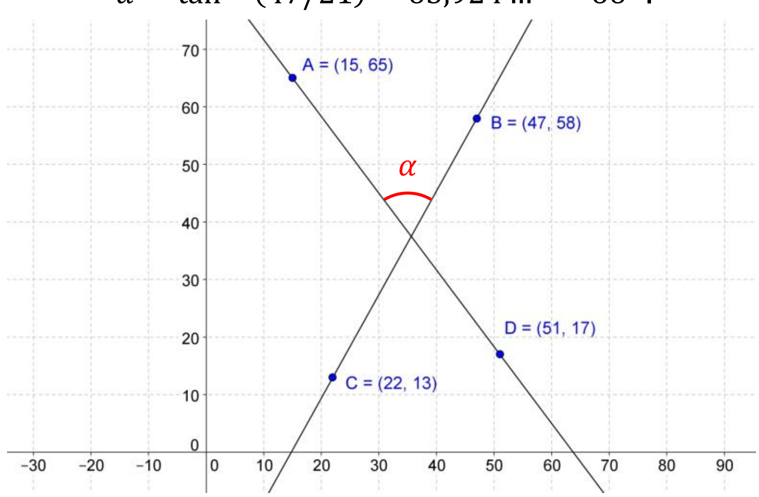
$$k_1 = \frac{58 - 13}{47 - 22} = \frac{9}{5}, \qquad k_2 = \frac{17 - 65}{51 - 15} = -\frac{4}{3},$$

Joten suorien väliseksi kulmaksi saadaan

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{\frac{9}{5} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = \left|\frac{\frac{47}{15}}{-\frac{7}{5}}\right| = \frac{47}{21},$$

josta

$$\alpha = \tan^{-1}(47/21) = 65{,}924\ldots° \approx 66°.$$



Esimerkki Osoita, että suoraparven $y = 3ax - 4a + 2$ kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta. Mikä tämä piste on?

Tapa 1: Valitaan parvesta kaksi suoraa ja määritetään niiden avulla leikkauspiste. Parametrin a arvoilla 0 ja 1 saadaan suorat $y = 2$ ja $y = 3x - 2$. Leikkauspiste on $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. (Koordinaatti $y = 2$ on jo valmiina. Sijoitetaan se jälkimmäiseen yhtälöön → $2 = 3x - 2$, eli $x = \frac{4}{3}$).

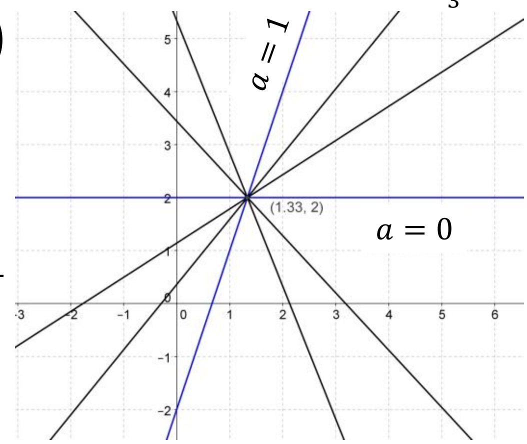
Koska leikkauspisteessä $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ on $y = 2$ ja toisaalta

$$3ax - 4a + 2$$
$$= 3a \cdot \frac{4}{3} - 4a + 2$$
$$= 4a - 4a + 2 = 2$$

riippumatta parametrin a arvosta, niin kaikki suorat

$$y = 3ax - 4a + 2$$

kulkevat pisteen $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ kautta.



Tapa 2: Kirjoitetaan yhtälö $y = 3ax - 4a + 2$ muotoon

$$y - 2 = 3ax - 4a \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = 3a\left(x - \frac{4}{3}\right),$$

josta havaitaan, että kyseinen yhtälö esittää suoraa, joka kulkee pisteen $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ kautta riippumatta parametrin a arvosta.

Esimerkki:

Osoita, että suorat $-ax+y+a-4=0$ kulkevat kaikilla parametrin a $\in \mathbb{R}$ arvoilla saman pisteen kautta ja määritä tämä piste. Kun suoran yhtälössä on mukana jokin vakio eli parametri, tässä a, niin puhutaan suoraparvesta.

Tod.: (IDEA: tehdään valinta → lasketaan piste → tarkistetaan).
Valitaan aluksi suoraparvesta kaksi suoraa. Esimerkiksi parametrin arvoilla $a=1$ ja $a=0$ saadaan suorat (valitse pieniä arvoja $0,1,-1$):

$$-1\cdot x+y+1-4=0 \quad \text{ja} \quad -0\cdot x+y+0-4=0$$

$$\Longrightarrow \quad -x+y-3=0 \quad \text{ja} \quad y-4=0$$

Näiden suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} -x+y-3=0 \\ \quad\ \ y-4=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y-3=x \\ \quad\ \ y=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4-3=1=x \\ \quad\quad\quad\ \ y=4 \end{cases}$$

Leikkauspisteeksi saadaan $(1,4)$.

Vielä pitää osoittaa, että *kaikki* suoraparven suorat kulkevat pisteen $(1,4)$ kautta. Toisin sanoen, pisteen koordinaatit $x=1$ ja $y=4$ toteuttavat suoran yhtälön $-ax+y+a-4=0$ kaikilla parametrin a arvoilla:

$$-a\cdot 1+4+a-4=0$$

$$\Longrightarrow \quad -a+4+a-4=0 \quad \text{OK, tosi}$$

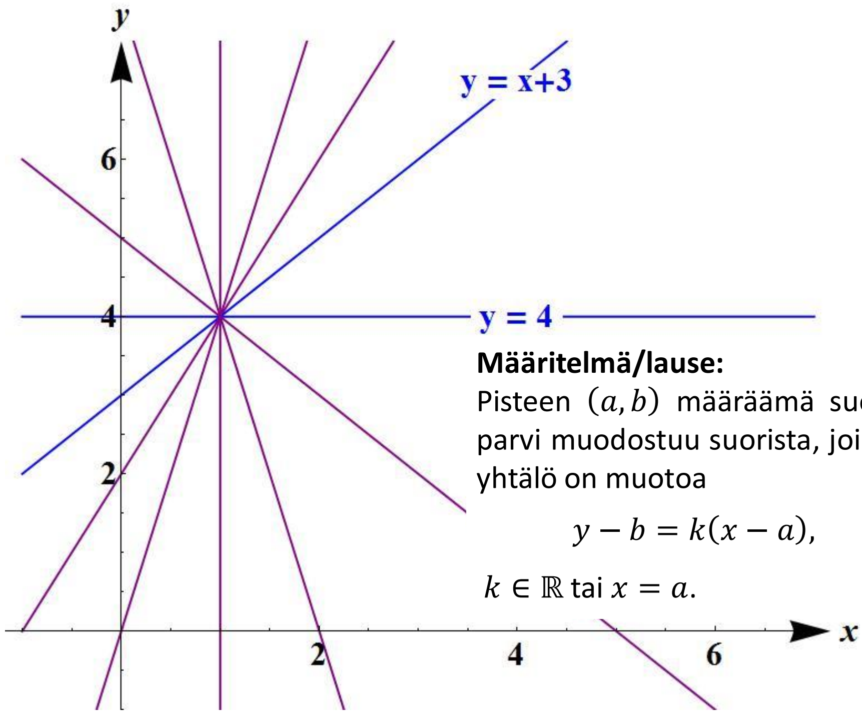
Tod. (tapa2): (IDEA: hyödynnetään toista suoran esitysmuotoa).
Koska suora voidaan kirjoittaa myös muotoon $y-y_0=k(x-x_0)$, niin saadaan

$$-ax+y+a-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad y-4=ax-a$$

$$\Leftrightarrow \quad y-4=a(x-1)$$

Eli suora kulkee pisteen $(1,4)$ kautta. Koska piste $(1,4)$ ei riipu parametrin a arvosta, kaikki suoraparven suorat kulkevat tämän pisteen kautta.
Muista suoran eri esitysmuodot:

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y=kx+\underbrace{y_0-kx_0}_{=:b} \quad \Leftrightarrow \quad ax+by+c=0$$



Määritelmä/lause:
Pisteen (a, b) määräämä suoraparvi muodostuu suorista, joiden yhtälö on muotoa

$$y - b = k(x - a),$$

$k \in \mathbb{R}$ tai $x = a$.