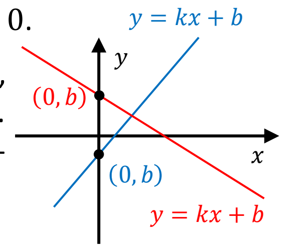
Suoran kulmakerroin ja suuntakulma

Suoran yhtälö y:n suhteen ratkaistussa muodossa on

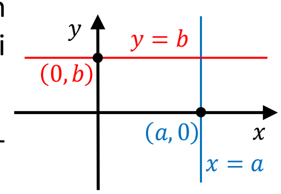
$$y = kx + b,$$

missä vakiotermi b ilmoittaa suoran ja y-akselin leikkauskohdan, eli pisteen $(0, b)$. Kulmakerroin k määrää suoran suunnan. Sanotaan, että suora on ***nouseva***, kun $k > 0$, ja ***laskeva***, kun $k < 0$.



Jos $k = 0$, niin suoran yhtälö on muotoa $\boldsymbol{y = b}$, eli tämä suora on x-akselin suuntainen (vakio). Huom. xy −koordinaatistossa x-akselin (vaaka-akseli) yhtälö on $y = 0$.

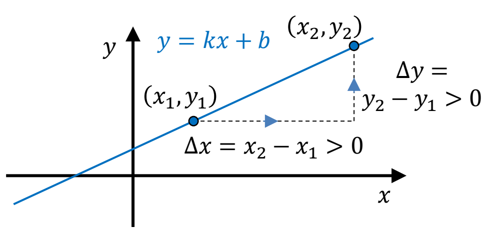
Yhtälön $\boldsymbol{x = a}$ kuvaaja on vastaavasti y-akselin suuntainen suora. Sillä ei ole kulmakerrointa (tai se on ”∞”). Erityisesti y-akselin yhtälö on $x = 0$.

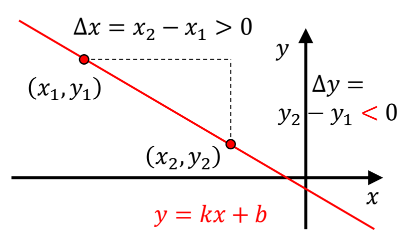


Miten suoran kulmakerroin määritetään, kun tiedetään suoran 2 pistettä?

Lause, kahden annetun pisteen kautta kulkevan suoran kulmakerroin:
Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \text{kun } x_2 \neq x_1 .$$





Kulmakerroin on suoran pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) valinnasta riippumaton, koska suorakulmaisen kolmion kateettien suhde säilyy yhdenmuotoisissa kolmioissa.

Esimerkki Pisteiden $(2, -1)$ ja $(-3, 2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin voidaan laskea kahdella tavalla.

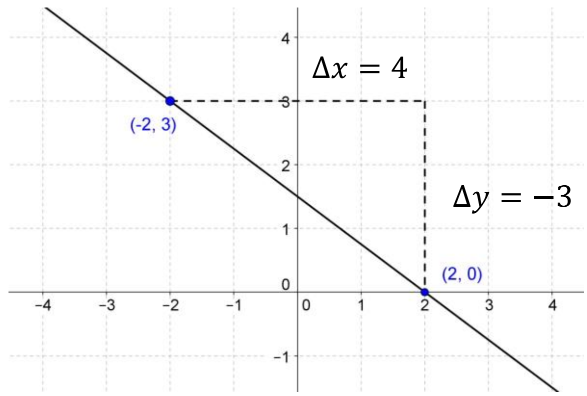
$$k = \frac{2 - (-1)}{-3 - 2} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5} \quad \text{tai} \quad k = \frac{-1 - 2}{2 - (-3)} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} .$$

Esimerkki Piirrä suora, joka kulkee pisteen $(-2,3)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$.

Kulmakerroin on negatiivinen, eli kyseessä on laskeva suora. Lisäksi

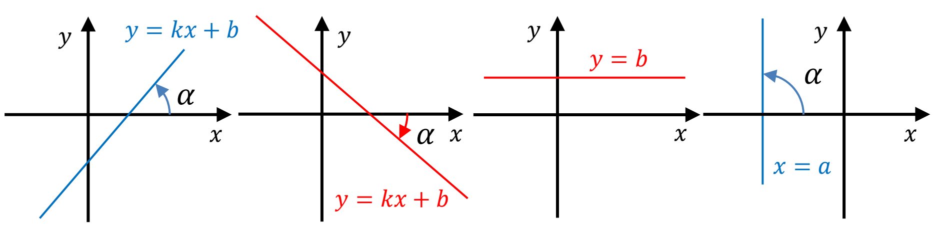
$$k = -\frac{3}{4} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \implies \begin{cases} \Delta x = 4 \\ \Delta y = -3 \end{cases},$$

joten, kun pisteestä $(-2,3)$ mennään 4 yksikköä oikealle ja kolme yksikköä alas, niin päädytään pisteeseen $(2,0)$. Piirretään suora näiden kahden pisteen kautta:



Määritelmä, suoran suuntakulma:

Koordinaattiakseleita leikkaavan suoran *suuntakulma*, on itseisarvoltaan pienin x-akselin positiivisen suunnan ja suoran välisistä suunnatuista kulmista. Lisäksi x-akselin suuntaisen suoran suuntakulma on $0°$ ja y-akselin suuntaisen suoran suuntakulma on $90°$. Suuntakulma on siis välillä $]-90°, 90°]$. Siis k positiivinen jos ja vain jos α positiivinen.



nouseva suora	laskeva suora		ei kulmakerrointa
$k > 0, \alpha > 0°$	$k < 0, \alpha < 0°$	$k = 0, \alpha = 0°$	$\alpha = 90°$

Trigonometriasta muistetaan, että

$$\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}},$$

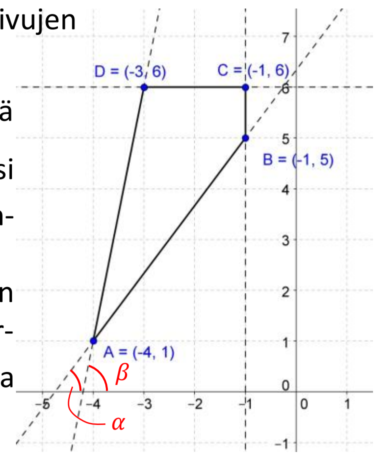
joten saadaan lause:

Lause, suuntakulman ja kulmakertoimen yhteys:
Suoran kulmakerroin on suuntakulman tangentti

$$k = \tan\alpha\,, \qquad -90° < \alpha < 90°.$$

Ja kun suora on y-akselin suuntainen, sen suuntakulma on $\alpha = 90°$ eikä sillä ole kulmakerrointa (ääretöntä ei hyväksytä, sillä ∞ ei ole luku).

Esimerkki Nelikulmion $ABCD$ kärjet ovat $A = (-4{,}1)$, $B = (-1{,}5)$, $C = (-1{,}6)$ ja $D = (-3{,}6)$. Määritä sen sivujen määräämien suorien suuntakulmat.

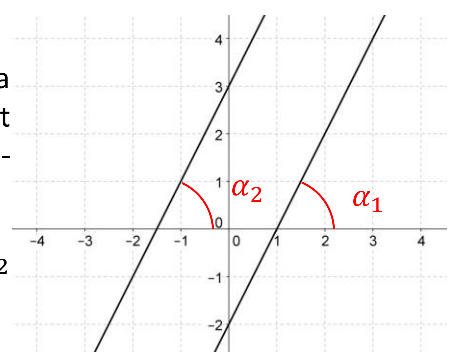


Suoran AB kk. $k = \frac{5-1}{-1-(-4)} = \frac{4}{3}$. Yhtälöstä $k = \tan\alpha = \frac{4}{3}$ saadaan suuntakulmaksi $\alpha \approx 53{,}1°$. Suora BC on y-akselin suuntainen, joten sen suuntakulma on $90°$.
Suora CD on x-akselin suuntainen, joten suuntakulma on $0°$. Suoran DA kulmakerroin $h = \frac{6-1}{-3-(-4)} = 5$, eli $h = \tan\beta = 5$ ja suuntakulma on $\beta \approx 78{,}7°$.

Lause, Suorien yhdensuuntaisuus:
Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niiden kulmakertoimet ovat samat **tai** suorat ovat y-akselin suuntaiset.

Suorat $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos

$$k_1 = k_2.$$



$k_1 = k_2, \qquad \alpha_1 = \alpha_2$

Esimerkki (kertauksena) Suora kulkee pisteen $(1,-2)$ kautta ja on suoran $x + 2y - 4 = 0$ suuntainen. Määritä suoran yhtälö.

Suoran $x + 2y - 4 = 0 \iff y = -\frac{1}{2}x + 2$ kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$, joten myös kysytyn suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.
Suora kulkee siis pisteen $(1,-2)$ kautta, joten saadaan suoran yhtälö

$$y - (-2) = -\tfrac{1}{2}(x-1) \iff y = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} \iff x + 2y + 3 = 0\,.$$