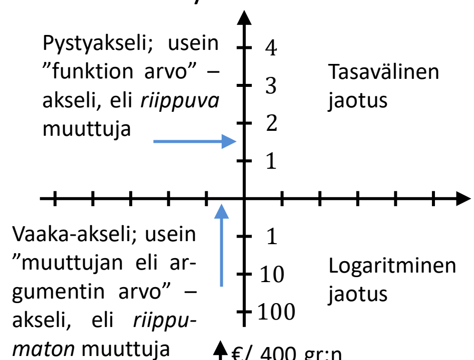
Piste ja jana koordinaatistossa

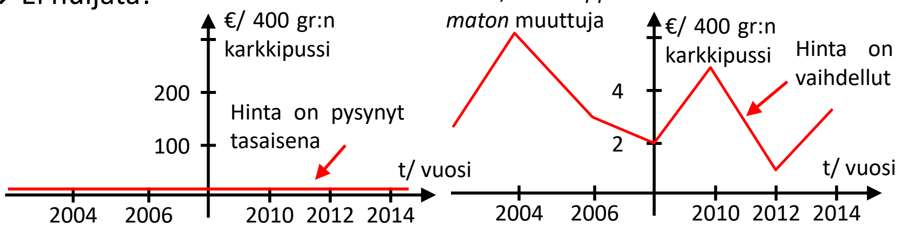
ANALYYTTINEN GEOMETRIA MAA5

Kertausta 1.kurssi → Eri asioiden välisten riippuvuuksien havainnollistamiseen käytetään usein koordinaatistoesitystä.

Pystyakselilla *riippuvan* muuttujan arvot riippuvat vaaka-akselin muuttujan arvoista.

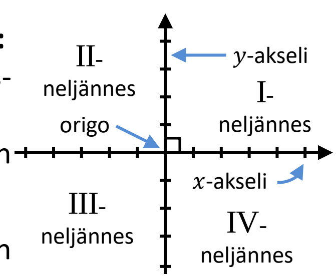
Akseleiden jaotus ja yksiköt valitaan siten, että riippuvuuden luonne ja sitä esittävän kuvaajan muoto tulevat hyvin esille.
→ Ei huijata!



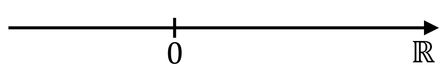


Määritelmä, suorakulmainen koordinaatisto:
Koordinaatisto, jonka akselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan on *suorakulmainen*.
Sitä kutsutaan xy-koordinaatistoksi ja akselien leikkauspistettä *origoksi*.

Akseleiden rajoittamia tason osia kutsutaan ensimmäiseksi neljänneksi jne.



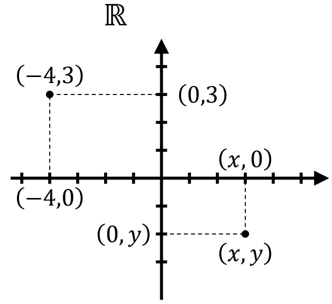
Suoran pisteet ja reaaliluvut vastaavat *täysin* toisiaan, puhutaan lukusuorasta.



Analogisesti (vastaavasti, yhdenmukaisesti) tason pisteet ja järjestetyt lukuparit (x, y) vastaavat *täysin* toisiaan

$$\text{Tason piste} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y)\,,$$

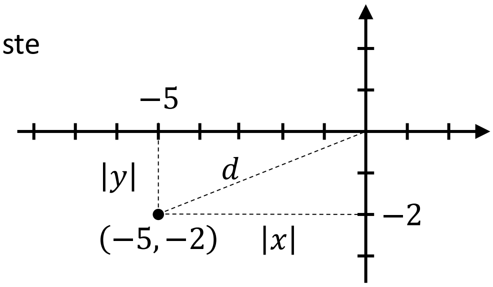
missä x ja y ovat pisteen koordinaatteja. Pisteen esitystapa: (vaaka koord., pysty koord.)



Pisteen (x, y) projektio vaaka-akselilla on x, eli piste $(x, 0)$ ja vastaavasti projektio pysty-akselilla on y, eli piste $(0, y)$.

Esimerkki Kuinka kaukana piste $P = (-5, -2)$ on
a) koordinaattiakseleista,
b) origosta ?

Etäisyys → itseisarvo !



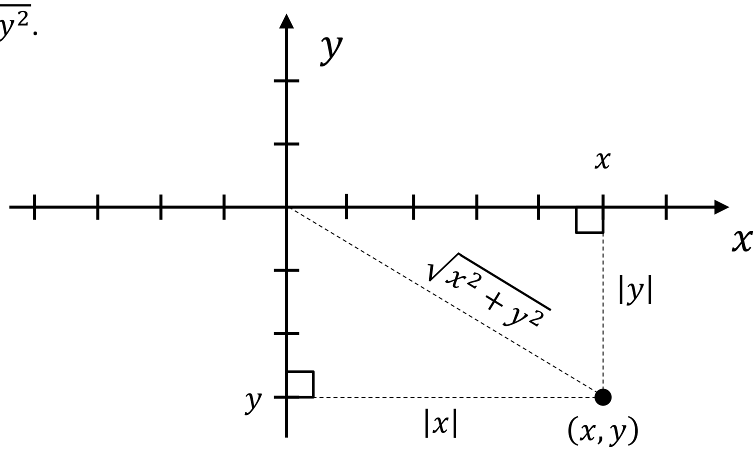
a) Koska $P = (-5, -2) = (x, y)$, niin etäisyydelle x-akselista saadaan $|y| = |-2| = 2$ ja vastaavasti y-akselista saadaan $|x| = |-5| = 5$.

b) Pythagorasta hyödyntäen: $d^2 = |x|^2 + |y|^2 = (x)^2 + (y)^2$ ja sijoittamalla lukuarvot saadaan:

$$d = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4\,.$$

Tämä pätee yleisesti!

Lause, pisteen etäisyys koordinaattiakseleista ja origosta:
Pisteen (x, y) etäisyys x-akselista on $|y|$, y-akselista on $|x|$ ja origosta $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Määritelmä, Käyrän yhtälö: TÄRKEÄ!
Käyrän muodostavat ne ja vain ne pisteet, jotka toteuttavat *käyrän yhtälön*.
Eli piste on käyrällä, jos pisteen koordinaatit toteuttavat yhtälön.

Esimerkki Onko piste **a)** $(2, -1)$, **b)** $(-1,3)$ suoralla $y = 2 - x$?
Sijoitetaan koordinaatit, saadaan

$$\mathbf{a})\quad -1 = 2 - 2 = 0, \qquad \text{epätosi} \rightarrow \text{ei ole}$$
$$\mathbf{b})\quad 3 = 2 - (-1) = 3, \qquad \text{tosi} \rightarrow \text{on}$$

Esimerkki Onko piste **a)** $(-1,2)$, **b)** $(-2,4)$ käyrällä

$$xy - x + 2y - 3 = 0\,?$$

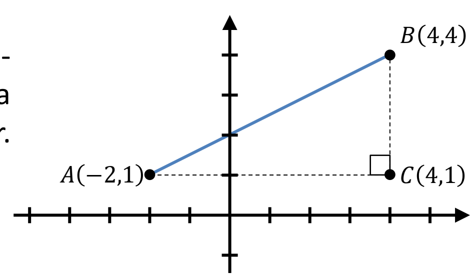
Sijoitetaan koordinaatit, saadaan

$$\mathbf{a})\ -1 \cdot 2 - (-1) + 2 \cdot 2 - 3 = -2 + 1 + 4 - 3 = 0, \qquad \text{tosi} \rightarrow \text{on}$$
$$\mathbf{b})\ -2 \cdot 4 - (-2) + 2 \cdot 4 - 3 = -8 + 2 + 8 - 3 = -1 \neq 0,$$
$$\text{epätosi} \rightarrow \text{ei ole}$$

Käyrän yhtälö voi olla y:n suhteen *ratkaistussa eli eksplisiittisessä muodossa* $y = f(x)$ tai *ratkaisemattomassa eli implisiittisessä muodossa* $F(x, y) = 0$.
Esimerkin 1 käyrä (siis suora) on ratkaistussa ja esimerkin 2 käyrä on ratkaisemattomassa muodossa.

Janan pituus ja keskipiste

Esimerkki Kuinka kaukana piste $A = (-2, 1)$ on pisteestä $B = (4,4)$?
Pitää siis etsiä pituus AB.



Kuvion suorakulmaisessa kolmiossa ABC on $AC = 4 - (-2) = 6$ ja $BC = 4 - 1 = 3$, joten Pythagor. antaa

$$AB^2 = 6^2 + 3^2 = 45,$$

josta $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$.

Vastaavalla tavalla lasketaan yleisten tason pisteiden (kuva seur. dia)

$$A = (x_1, y_1), \qquad B = (x_2, y_2)$$

välinen etäisyys d.
Kun vielä merkitään $C = (x_2, y_1)$, niin kateettien pituudet ovat

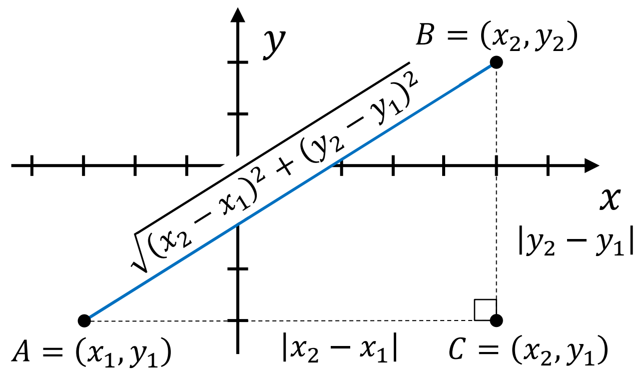
$$AC = |x_2 - x_1|, \qquad BC = |y_2 - y_1|,$$

joten

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ja

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$



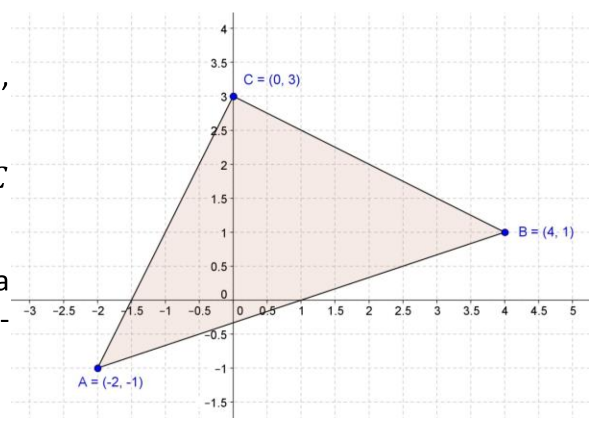
Lause, Janan pituus:
Pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ etäisyys, eli janan AB pituus on

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Esimerkki Kolmion kärjet ovat $A = (-2, -1)$, $B = (4,1)$ ja $C = (0,3)$.

Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen.

VAST: Koska sivut AC ja BC ovat yhtä pitkät, kolmio ABC on tasakylkinen.



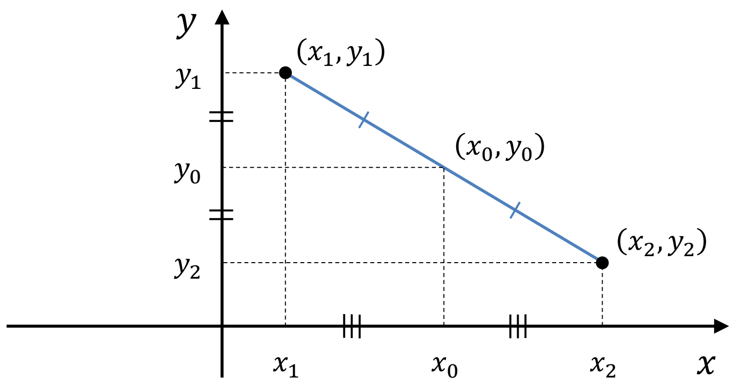
Kolmion sivujen pituudet ovat

$$AB = \sqrt{\left(4 - (-2)\right)^2 + \left(1 - (-1)\right)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{\left(0 - (-2)\right)^2 + \left(3 - (-1)\right)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Olkoon (x_0, y_0) pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välisen janan keskipiste. Tällöin x_0 on lukujen x_1 ja x_2 keskiarvo. Vastaavasti y_0 on lukujen y_1 ja y_2 keskiarvo, joten on voimassa seuraava lause.



Lause, Janan keskipiste:
Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välisen janan keskipiste on

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Esimerkki **1.** Jos janan päätepisteet ovat $(-2,4)$ ja $(3,-2)$, niin janan keskipiste on

$$\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

2. Janan keskipiste $(-2,1)$ ja toinen päätepiste on ja $(-5,3)$. Määritä toinen päätepiste.
Olkoon (x, y) toinen päätepiste (tuntematon). Tällöin koska

$$\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = (-2,1),$$

niin

$$\frac{-5+x}{2} = -2 \quad \Longrightarrow \quad -5 + x = -4 \quad \Longrightarrow \quad x = 1,$$

$$\frac{3+y}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 3 + y = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = -1.$$

Toinen päätepiste on siis $(1, -1)$.