Ratkaise epäyhtälö

$$\big|x - |3 - x|\big| < 2x - 1$$

Epäyhtälön vasen puoli on aina ei-negatiivista, joten saadaan alkuehto oikean puolen lausekkeelle

$$2x - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Nyt

$$\overbrace{\big|x - |3 - x|\big|}^{=|f(x)|} < \overbrace{2x - 1}^{=g(x)} \quad \Longrightarrow \quad -g(x) < f(x) < g(x)$$

eli

$$-(2x - 1) < x - |3 - x| < 2x - 1$$

$$1 - 3x < -|3 - x| < x - 1$$

$$3x - 1 > |3 - x| > 1 - x$$

Suunta kääntyy, kun kerrotaan -1:llä

Muodostuu kaksi tapausta: 1. ey 2.ey

1. ey:

$$3x - 1 > |3 - x|$$

Saadaan alkuehto, koska itseisarvon pitää olla aina ei-negatiivista:

$$3x - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq \frac{1}{3}.$$

Nyt

$$\overbrace{|3 - x|}^{=|f(x)|} < \overbrace{3x - 1}^{=g(x)} \quad \Longrightarrow \quad -g(x) < f(x) < g(x)$$

eli

$$-(3x - 1) < 3 - x < 3x - 1$$

Molemmat epäyhtälöt pitää olla voimassa koska **”ja”** – sana.

$$-3x + 1 < 3 - x \qquad \textbf{ja} \qquad 3 - x < 3x - 1$$

$$-2x < 2 \qquad \text{ja} \qquad 4 < 4x$$

$$-1 < x \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{1 < x}$$

Koska molemmat ehdot pitää olla voimassa, **”ja”** – sana, niin jälkimmäinen $\boldsymbol{1 < x}$ on vahvempi ehto (toteuttaa myös ehdot $x \geq \frac{1}{3}$ ja $x \geq \frac{1}{2}$). Vast. $x > 1$.

2. ey:

$$|3-x|>1-x$$

Nyt ei ole alkuehtoa, koska vasen puoli on aina ei-negatiivista, mutta oikea puoli saa olla negatiivista.

Saadaan

$$\overbrace{|3-x|}^{=|f(x)|}>\overbrace{1-x}^{=g(x)} \quad \Longrightarrow \quad f(x)>g(x) \quad \textbf{tai} \quad f(x)<-g(x)$$

eli

$$3-x>1-x \qquad \text{tai} \qquad 3-x<-(1-x).$$

Nyt riittää jos toinen vaihtoehto toteutuu, koska **”tai”** – sana.

$$3-x>1-x \qquad \textbf{tai} \qquad 3-x<x-1$$

$$3>1 \qquad \text{tai} \qquad 4<2x$$

OK, tosi kaikilla x tai $\mathbf{2<x}$**, OK** $2>\frac{1}{2}$

Vaikka jälkimmäisestä saadaan ehto, niin koska **”tai”** – sana, ja toinen on tosi kaikilla x, joten vastauksena on tosi kaikilla x.

Nyt pitää vielä yhdistää molemmat epäyhtälöt.

Koska alkuperäinen epäyhtälö saatiin muotoon

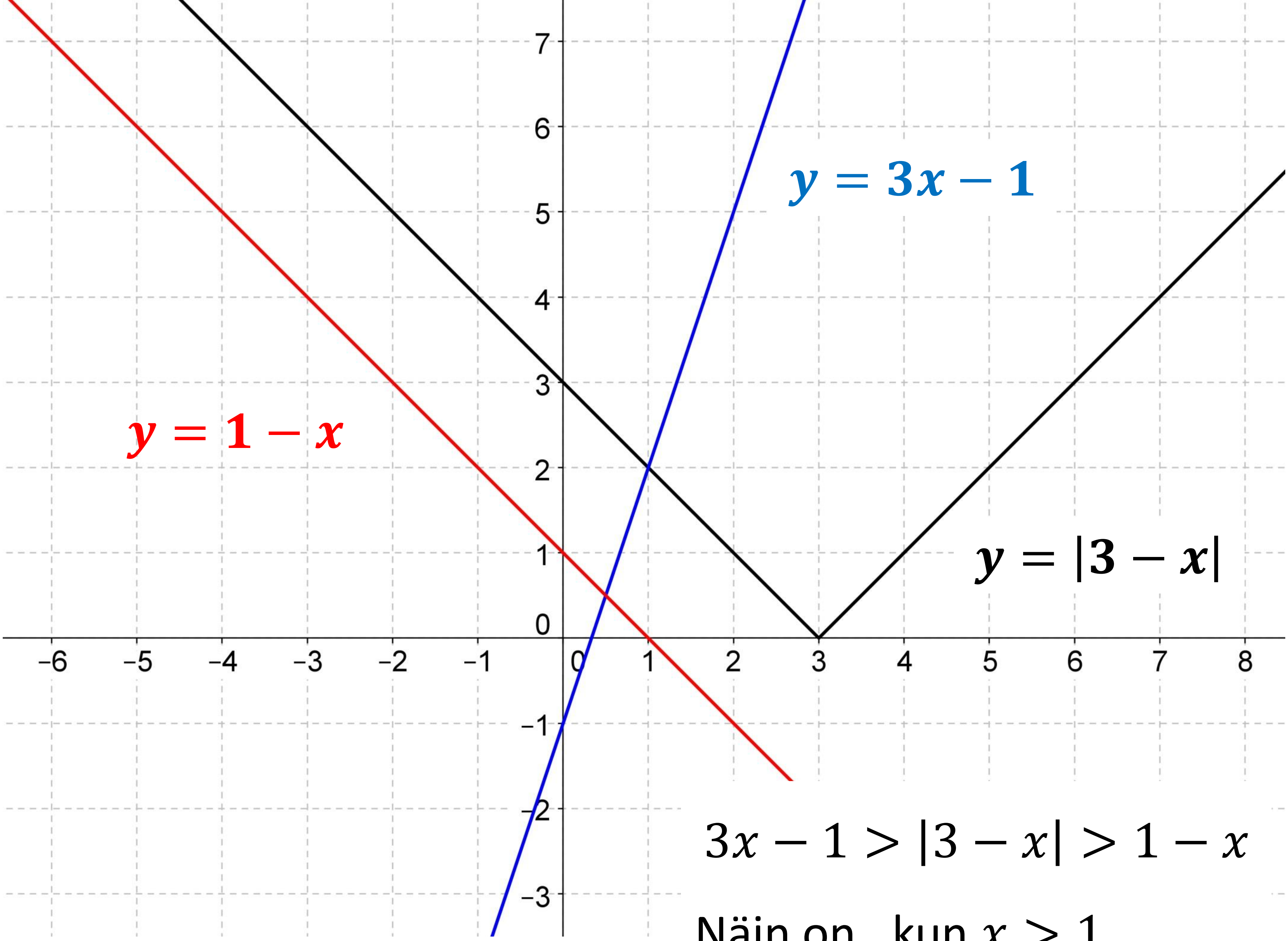
$$3x - 1 > |3 - x| > 1 - x$$

joista toinen oli tosi kaikilla x ja toinen, kun $x > 1$.

Kyseessä on **”ja”** – sana tilanne, niinpä molemmat ehdot pitää olla voimassa ja näin saadaan lopullinen vastaus: $x > 1$.

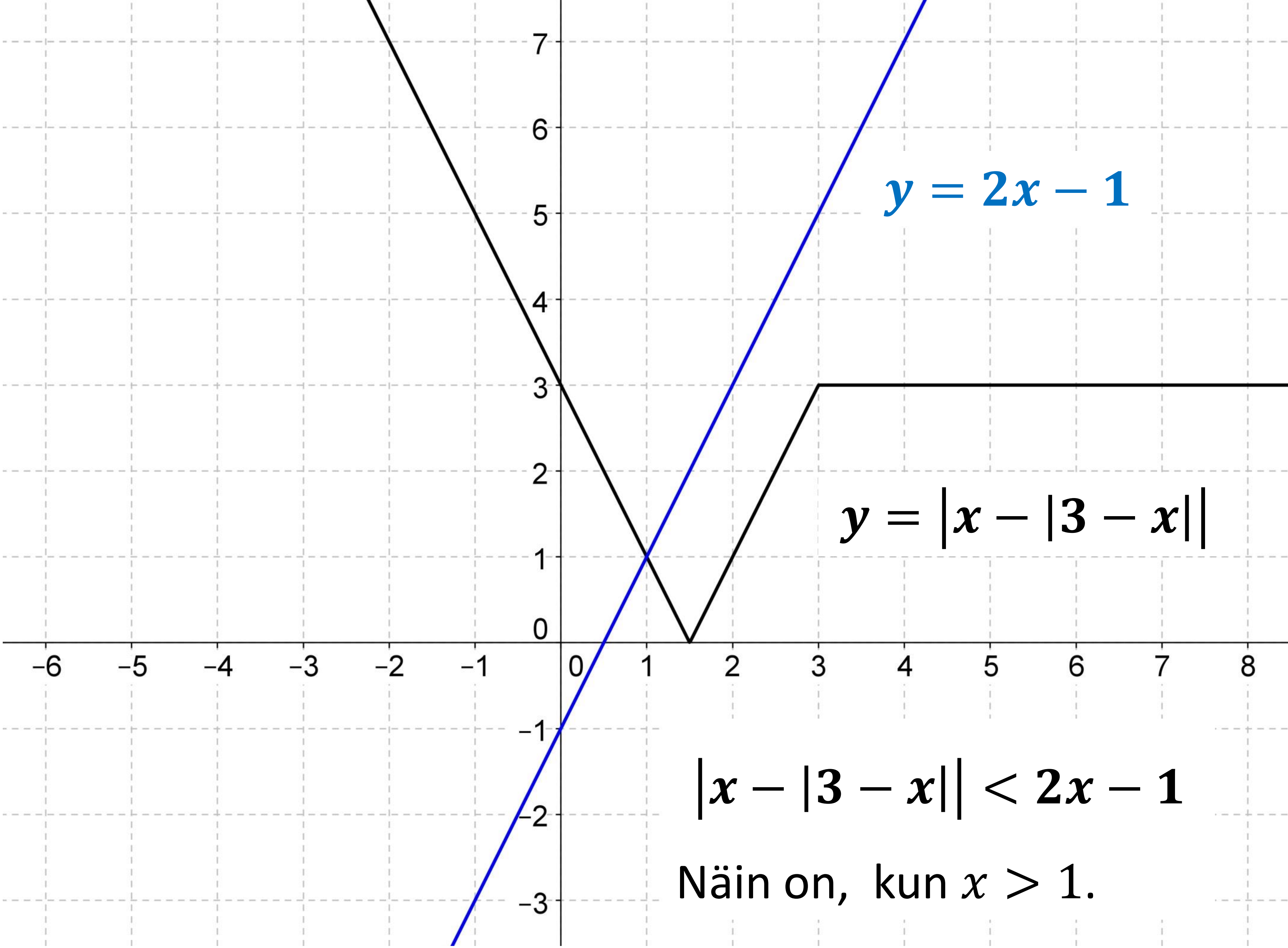
Tarkastellaan vielä käyriä:

- Ensin käyriä $y = 3x - 1$, $y = |3 - x|$ ja $y = 1 - x$
- Sitten käyriä $y = \big|x - |3 - x|\big|$ $y = 2x - 1$



$$3x - 1 > |3 - x| > 1 - x$$

Näin on, kun $x > 1$.



$$\left|x - |3 - x|\right| < 2x - 1$$

Näin on, kun $x > 1$.