Itseisarvoepäyhtälö

Itseisarvoepäyhtälöt voidaan jakaa seuraaviin luokkiin:

1. muotoa $|ax+b|<r, \quad r \in \mathbb{R}$ ja vastaavat,
2. muotoa $|f(x)|<g(x)$ ja vastaavat,
3. muotoa $|f(x)|<|g(x)|$ ja vastaavat sekä
4. muut, esim. $|f(x)| \pm h(x) \pm r = \pm|g(x)|, \quad r \in \mathbb{R}$

oleviin luokkiin. Epäyhtälömerkin $<$ tilalla voi olla $>, \leq, \geq$ tai $\neq$.

Kuten yhtälöissä, palauta annettu epäyhtälö aluksi (mikäli mahdollista) johonkin edellä mainittuun muotoon. 4. luokka siis käsittää muut epäyhtälötyypit.

<u>1. Epäyhtälötyyppi $|ax+b|<r$ ja vastaavat:</u>

Kyseessähän on lineaarinen käyrä $y=ax+b$, eli suora.

Esimerkki Ratkaise epäyhtälö $|3x-2|<4$.

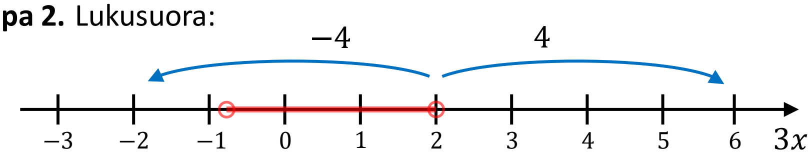
Esimerkki 1 Ratkaise epäyhtälö $|3x-2|<4$.

Huomaa epäyhtälön suunta!

Tapa 1.

$\lvert 3x-2\rvert<4$	ratkaistava epäyhtälö,
$-4<3x-2<4$	yhtäpitävä kaksoisepäyhtälö
$-4+2<3x<4+2$	vakion siirto
$-2<3x<6$	sievennys
$\frac{-2}{3}<x<2$	x:n kertoimella jako (suunta säilyy, sillä kerroin 3 on positiivinen)

Tapa 2. Lukusuora:



$$\Rightarrow \begin{cases} 3x>-2 \\ 3x<6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2/3 \\ x<2 \end{cases}$$

Tapa 3. Kuvaajat: Piirretään käyrät

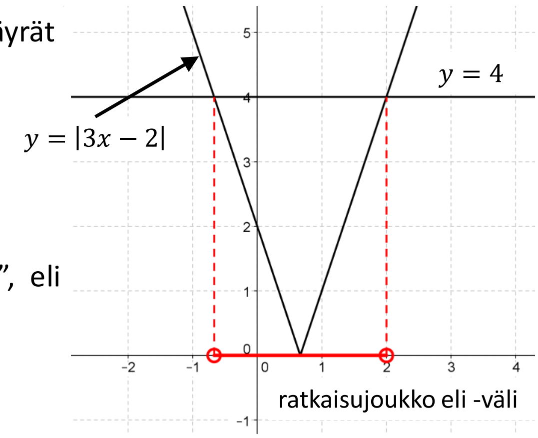
$$\begin{cases} y = |3x - 2| \\ y = 4 \end{cases}$$

ja etsitään milloin käyrä

$$y = |3x - 2|$$

on käyrän $y = 4$ ”alapuolella”, eli pienempää.
Näin on silloin, kun

$$-2/3 < x < 2.$$

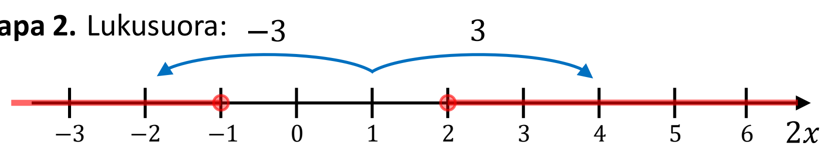


Esimerkki 2 Ratkaise epäyhtälö $|2x - 1| \geq 3$.

Tapa 1.

$\|2x-1\| \geq 3$		ratkaistava epäyhtälö,
$2x - 1 \geq 3$ **tai**	$2x - 1 \leq -3$	yhtäpitävä kaksoisepäyhtälö
$2x \geq 4$	$2x \leq -2$	vakion siirto
$x \geq 2$	$x \leq -1$	x:n kertoimella jako (suunta säilyy, sillä kerroin 2 on positiivinen)

Tapa 2. Lukusuora:



$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \leq -2 \\ 2x \geq 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Tapa 3. Kuvaajat: Piirretään käyrät

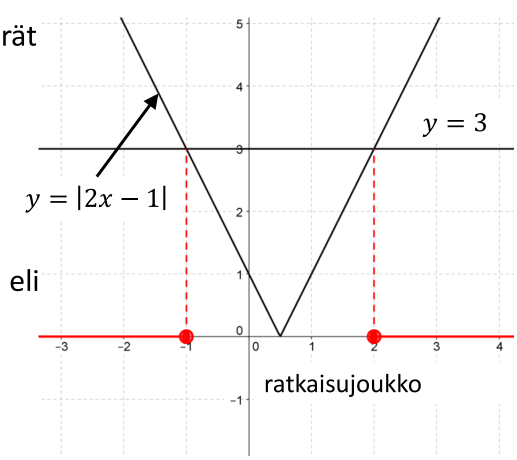
$$\begin{cases} y = |2x - 1| \\ y = 3 \end{cases}$$

ja etsitään milloin käyrä

$$y = |2x - 1|$$

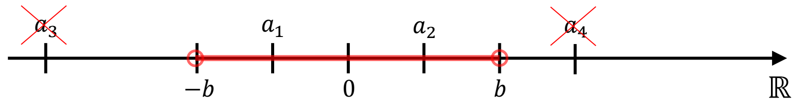
on käyrän $y = 3$ ”yläpuolella”, eli suurempaa.
Näin on silloin, kun

$$x \leq -1 \quad \text{tai} \quad x \geq 2.$$



2. Epäyhtälötyyppi $|f(x)| < g(x)$ ja vastaavat:

Yleisesti pätee $|a| < b \iff -b < a < b$, kun $b > 0$.

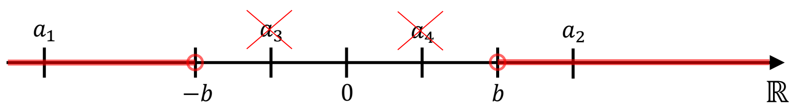


Entä, jos $b \leq 0$? Silloinhan ekvivalenssin molemmat puolet ovat epätosia, eli

$$|a| < b \leq 0, \quad \text{epätosi} \quad \text{ja} \quad 0 \leq -b < a < b \leq 0, \quad \text{epätosi.}$$

ja ekvivalenssi on siis tosi (mutta ei mielekäs). Sanotaan, että epäyhtälöllä $|a| < b$ ei ole ratkaisua, kun $b \leq 0$.

Edelleen yleisesti pätee $|a| > b \iff a > b$ tai $a < -b$, kun $b > 0$.



Ja kun $b \leq 0$, niin $|a| > b$ on selvästi tosi (ja mielekäs) kuin myös ekvivalenssin toinen puoli $a > b$ tai $a < -b$.

Edellä saadut tulokset ovat voimassa myös silloin, kun on erisuuruusmerkit $\leq$ tai $\geq$ kyseessä.

Siis $\quad -b \leq a$ ja $a \leq b$

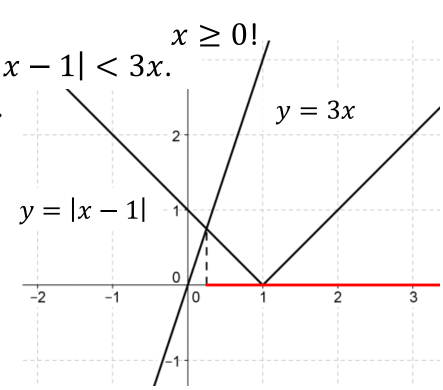
$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b, \qquad |a| \geq b \iff a \geq b \text{ tai } a \leq -b.$$

Nämä tulokset (lauseet) ovat voimassa kaikilla a ja b (vaikkei välttämättä ole mielekkäitä), mutta esim. vastaava yhtälöä koskeva lause

$$|a| = b \iff a = b \text{ tai } a = -b$$

pätee vain, kun $b \geq 0$.

Esimerkki 3 **a)** Ratkaise epäyhtälö $|x-1| < 3x$.



Ratkaisu Lausetta $|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x)$ käyttäen

$$-3x < x - 1 < 3x$$

$$-3x + 1 < x < 3x + 1$$

eli

$$-4x + 1 < 0 \text{ ja } 0 < 2x + 1$$

$$\boxed{x > 0{,}25} \qquad x > -0{,}5$$

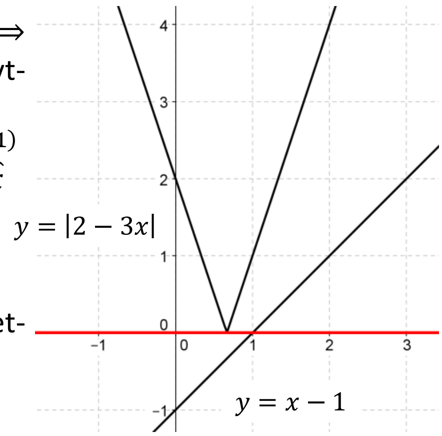
Esimerkki 3 **b)** Ratkaise epäyhtälö $x - 1 < |2 - 3x|$.

Ratkaisu Lausetta $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ tai $f(x) < -g(x)$ käyttäen

$2 - 3x > x - 1$ **tai** $2 - 3x < \overbrace{1 - x}^{=-(x-1)}$

$4x < 3$ $\qquad$ $2x > 1$

$x < 3/4$ $\qquad$ $x > 1/2$



Eli kaikki $x \in \mathbb{R}$ käyvät! Mistä tietää ettei kyseessä olekaan väli $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$?
Siitä, että sana on "tai" eikä "ja".

<u>3. Epäyhtälötyyppi $|f(x)| < |g(x)|$ ja vastaavat:</u>

Kun epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, niin neliöön korottamalla saadaan yhtäpitävä epäyhtälö alkuperäisen epäyhtälön kanssa.

Lause $\qquad |a| < |b| \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2 < |b|^2$ $\qquad$ sekä

$\qquad |a| \leq |b| \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2 \leq |b|^2$

Eli epäyhtälö, jonka molemmat puolet ovat itseisarvoja, voidaan *aina* ratkaista korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin.

Esimerkki 4 **a)** Ratkaise epäyhtälö $|x + 1| < |3 - x|$.

Tapa 1 $|x + 1| < |3 - x|$

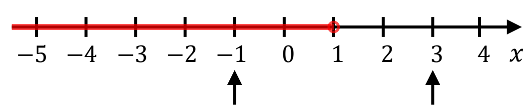
$(x + 1)^2 < (3 - x)^2$

$x^2 + 2x + 1 < 9 - 6x + x^2$

$8x < 8$

$x < 1$

Tapa 2 Lukusuoralla etäisyystulkintana: Ne pisteet joiden etäisyys -1:stä on pienempää kuin 3:sta, sillä voidaan kirjoittaa $|3 - x| = |x - 3|$.



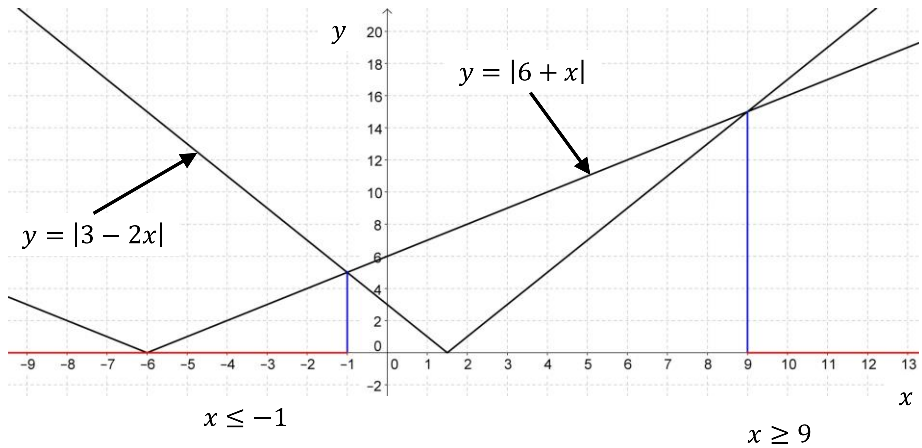
b) Ratkaise epäyhtälö $|3 - 2x| \geq |x + 6|$.

$$|3 - 2x| \geq |x + 6| \quad \Rightarrow \quad (3 - 2x)^2 \geq (x + 6)^2 \quad \Rightarrow$$

$$9 - 12x + 4x^2 \geq x^2 + 12x + 36 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 24x - 27 \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$3(x^2 - 8x - 9) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x + 1)(x - 9) \geq 0$$

b) Kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 9$. Näin ollen vastauksena $x \leq -1$ tai $x \geq 9$.



Ratkaisujoukko käsittää nyt kaksi osaväliä

Siis, kertauksena:
Kun vakiot:

$$|3x - 2| < 4$$

$$-4 < 3x - 2 \quad \textbf{ja} \quad 3x - 2 < 4$$

Ja

$$|2x - 1| \geq 3$$

$$2x - 1 \geq 3 \quad \textbf{tai} \quad 2x - 1 \leq -3$$

Kun funktiot:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -g(x) < f(x) \quad \textbf{ja} \quad f(x) < g(x)$$

Ja

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x) \quad \textbf{tai} \quad f(x) < -g(x)$$