Itseisarvoyhtälö

Itseisarvoyhtälöt jaetaan kolmeen (neljään) luokkaan:

1. muotoa $|f(x)| = a, \quad a \in \mathbb{R}$,
2. muotoa $|f(x)| = g(x)$,
3. muotoa $|f(x)| = |g(x)|$ ja
4. muut, esim. $|f(x)| + h(x) = |g(x)| + a, \quad a \in \mathbb{R}$

oleviin yhtälöluokkiin.

Mikäli annettu itseisarvoyhtälö ei ole jotakin yllä olevaa tyyppiä, niin palauta se siirtämällä termejä (kuten 2.kurssissa epäyhtälöt muokattiin aluksi normaalimuotoon). Esim. yhtälö $|x-2| - 3x = 6$ muokataan muotoon $|x-2| = 6 + 3x$, joka on 2. tyypin yhtälö.

<u>1. Yhtälötyyppi $|f(x)| = a$:</u>

Lause, yhtälö $|f(x)| = a,\ a \in \mathbb{R}$:
Jos $a \geq 0$, niin

$$|f(x)| = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = a \\ -f(x) = a \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \pm a\,.$$

Jos $a < 0$, niin yhtälöllä $|f(x)| = a$ ei ole yhtään ratkaisua. Tämä on niin sanottu ”alkutsekkaus”. Koska itseisarvo voidaan tulkita etäisyydeksi, niin hylätään negatiiviset etäisyydet.

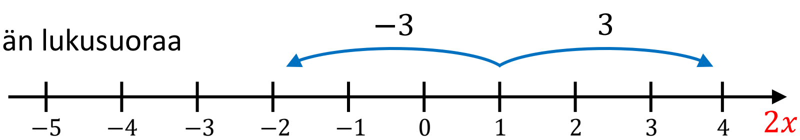
Esimerkki

$$\underbrace{|f(x)|}_{\geq 0 \text{ aina}} = -5, \qquad \text{epätosi, ei mahdollista.}$$

Esimerkki Ratkaise yhtälö $|2x-1| = 3$.
Aluksi $3 \geq 0$, OK. Edellisen lauseen nojalla saadaan

$$|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3 \\ 2x-1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

TAI
Käytetään lukusuoraa



TAI
Käytetään itseisarvon määritelmää

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{kun } 2x-1 \geq 0 \text{ eli kun } x \geq 0{,}5 \\ -(2x-1), & \text{kun } 2x-1 < 0 \text{ eli kun } x < 0{,}5 \end{cases},$$

jolloin saadaan

$\boldsymbol{x \geq 0,5}$**:** $2x - 1 = 3 \implies 2x = 4 \implies x = 2,$ OK $2 \geq 0{,}5.$

$\boldsymbol{x < 0,5}$**:** $1 - 2x = 3 \implies -2x = 4 \implies x = -1,$ OK $-1 < 0{,}5.$

2. Yhtälötyyppi $|\boldsymbol{f(x)}| = \boldsymbol{g(x)}$:

Lause, yhtälö $|\boldsymbol{f(x)}| = \boldsymbol{g(x)}$:
Jos $g(x) \geq 0$, niin $|f(x)| = g(x) \iff f(x) = \pm g(x)$. Jos $g(x) < 0$, niin yhtälöllä $|f(x)| = g(x)$ ei ole ratkaisua, eli yhtälö on epätosi.

HUOM! Tässä, kuten 1. yhtälötyypissä, pitää tehdä ”alkutsekkaus”.

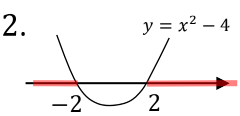
Esimerkki **a)** Ratkaise yhtälö $|x - 1| = 2x + 4$.
b) Ratkaise yhtälö $|x - 1| = x^2 - 4$.

a) Nyt alkutsekkaus antaa ehdon $2x + 4 \geq 0 \iff x \geq -2$. Lausetta käyttäen, saadaan

$$|x - 1| = 2x + 4 \iff x - 1 = \pm(2x + 4) \iff \begin{cases} x - 1 = 2x + 4 \\ x - 1 = -2x - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5 \ \text{HYL.} \\ 3x = -3 \end{cases} \implies x = -1, \qquad \text{OK sillä } -1 > -2.$$

b) Alkutsekkaus: $x^2 - 4 \geq 0 \iff x \leq -2$ tai $x \geq 2$.
Lausetta käyttäen, saadaan



$$|x - 1| = x^2 - 4 \iff \begin{cases} x - 1 = x^2 - 4 \\ x - 1 = -x^2 + 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \overset{\text{TI-nspire}}{\implies} \begin{cases} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \approx \begin{matrix} 2{,}303, \text{OK} \\ -1{,}303, \text{HYL.} \end{matrix} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \approx \begin{matrix} -2{,}791, \text{OK} \\ 1{,}791, \text{HYL.} \end{matrix} \end{cases}$$

Siis $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ tai $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

3. Yhtälötyyppi $|\boldsymbol{f(x)}| = |\boldsymbol{g(x)}|$:

Lause, yhtälö$|\boldsymbol{f(x)}| = |\boldsymbol{g(x)}|$:

$$|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = \pm g(x)$$

HUOM! Nyt ei tarvita ”alkutsekkausta”. Miksi? Koska yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia. Ratkaisumenetelmänä voidaan hyödyntää myös toiseen korotusta (kuten neliöjuuriyhtälöissä, 2.-kurssi).

Esimerkki Ratkaise yhtälö $|2x-3| = |2-x|$.
Lauseen nojalla

$$2x-3 = \pm(2-x) \implies \begin{cases} 2x-3 = 2-x \\ 2x-3 = x-2 \end{cases},$$

josta saadaan

$$\implies \begin{cases} 3x = 5 \\ x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5/3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

TAI
Koska $|2x-3|^2 = |2-x|^2 \iff (2x-3)^2 = (2-x)^2$, niin

$$4x^2 - 12x + 9 = 4 - 4x + x^2 \implies 3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$\implies x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} \implies \begin{matrix} x = 5/3, \\ x = 1 \end{matrix}.$$

Esimerkki(moniste) T – 27a
$3x = 3 + |2x-3| \implies 3x - 3 = |2x-3|$ ehto: $3x - 3 \geq 0$ eli $x \geq 1$.
Saadaan: $2x - 3 = \pm(3x-3) \implies \begin{cases} 2x-3 = 3x-3 \\ 2x-3 = 3-3x \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} -x = 0 \\ 5x = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0, \text{HYL.} \\ x = 6/5, \text{OK} \end{cases}$$

Esimerkki(moniste) T – 29b

$$|x^2 - x| = |4x^2 + 5x| \quad | \uparrow^2$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = 16x^4 + 40x^3 + 25x^2$$

$$\implies 15x^4 + 42x^3 + 24x^2 = 0$$

$$\implies x^2(15x^2 + 42x + 24) = 0$$

Laskin antaa: $x = 0$ tai $x = -2$ tai $x = -4/5$.

Siis, kertauksena:

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a, \qquad a \geq 0\,!$$

$$|f(x)| = g(x) \iff f(x) = \pm g(x), \qquad g(x) \geq 0\,!$$

$$|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = \pm g(x)$$

$$\text{TAI} \iff \big(f(x)\big)^2 = \big(g(x)\big)^2$$

Itseisarvoyhtälö – haastavampia esimerkkejä

Esimerkki Ratkaise yhtälö $|x-2| = 7 - |3-2x| - |x|$.
Yhtälöstä löytyy kolme itseisarvoa, mikä tarkoittaa sitä, että tarkasteltavana on neljä eri väliä. Mitkä? Välit saadaan, kun kirjoitetaan itseisarvot "auki". Siis

Välit ovat: $]-\infty, 0[, [0, \frac{3}{2}],]\frac{3}{2}, 2[, [2, \infty[$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{kun } x \geq 2 \\ \boxed{2-x,} & \boxed{\text{kun } x < 2} \end{cases}$$

Nyt on siis tarkasteltava kullakin välillä erikseen, minkälainen yhtälö muodostuu ja ratkaistava se.
Huomioi, että saadut ratkaisut, eli x:n arvot pitää toteuttaa välin ehdot!

$$|3-2x| = \begin{cases} \boxed{3-2x,} & \boxed{\text{kun } x \leq \frac{3}{2}} \\ 2x-3, & \text{kun } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|x| = |x-0| = \begin{cases} \boxed{x,} & \boxed{\text{kun } x \geq 0} \\ \boxed{-x,} & \boxed{\text{kun } x < 0} \end{cases}$$

$|x-2| = 7 - |3-2x| - |x|$

Kun $x < 0$:

$(2-x) = 7 - (3-2x) - (-x) \quad \Longrightarrow \quad 2 - x = 7 - 3 + 2x + x$

$-4x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$, OK $-\frac{1}{2} < 0$

Kun $0 < x \leq \frac{3}{2}$:

$(2-x) = 7 - (3-2x) - (x) \quad \Longrightarrow \quad 2 - x = 7 - 3 + 2x - x$

$|x-2| = 7 - |3-2x| - |x|$

Kun $0 < x \leq \frac{3}{2}$:

eli ei ratkaisua

$(2-x) = 7 - (3-2x) - (x) \quad \Longrightarrow \quad 2 - x = 7 - 3 + 2x - x$

$2x = -2 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$, RR $-1 \ngtr 0$

Kun $\frac{3}{2} < x < 2$:

$(2-x) = 7 - (2x-3) - (x) \quad \Longrightarrow \quad 2 - x = 7 - 2x + 3 - x$ ei ratkaisua

$2x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 4$, RR $4 \nless 2$

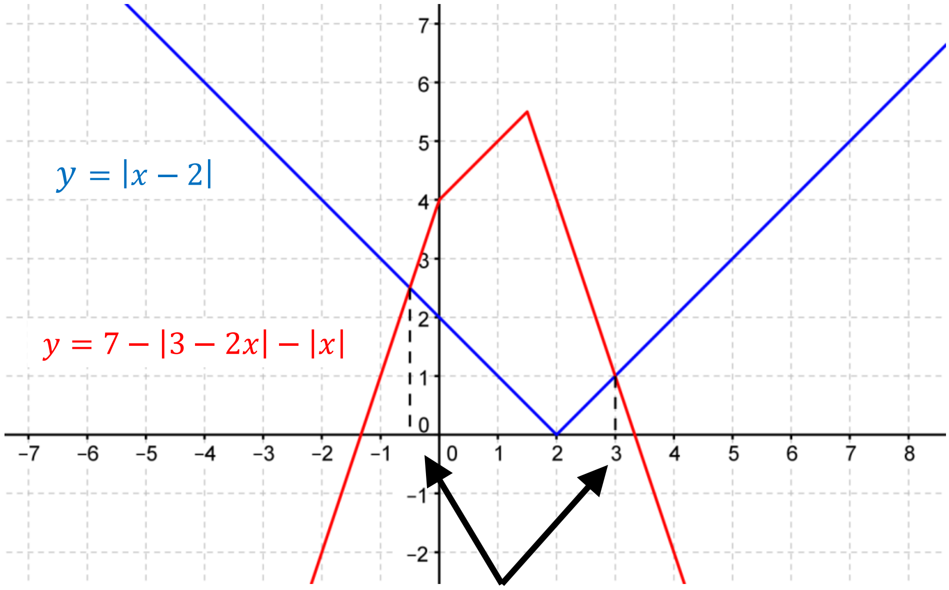
Kun $x \geq 2$:

$(x-2) = 7 - (2x-3) - (x) \quad \Longrightarrow \quad x - 2 = 7 - 2x + 3 - x$

$4x = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$, OK $3 \geq 2$

Vastaukseksi tulee: $\quad x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 3$.

Piirretään lopuksi kuvaaja yhtälöstä. Piirretään käyrä $y = |x-2|$ ja toisaalta käyrä $y = 7 - |3-2x| - |x|$. Katsotaan millä muuttujan x arvo(i)lla nämä käyrät leikkaavat toisensa vai leikkaako ollenkaan? Kyllä leikkaa sillä yllä on saatu kaksi ratkaisua.



Havaitaan, että leikkauskohtien x-koordinaattiarvot ovat $-\frac{1}{2}$ ja 3.

Esimerkki T – 35 b (moniste), kun muuttuja on itseisarvojen sisällä ja "vapaana" (4. luokka, "muut") TEHDÄÄN VIHKOON!

Ratkaise yhtälö $|x+3| + 2x + |2-x| = 10$.

Välit ovat: $]-\infty, -3[, [-3,2],]2, \infty[$ $\quad |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{kun } x \geq -3 \\ -x-3, & \text{kun } x < -3 \end{cases}$

$|x+3| + 2x + |2-x| = 10$ $\quad |2-x| = \begin{cases} 2-x, & \text{kun } x \leq 2 \\ x-2, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

Kun $x < -3$:

$(-x-3) + 2x + (2-x) = 10 \implies -2x + 2x - 1 = 10$

$-1 = 10 \implies$ RR, ei ratk.

Kun $-3 \leq x \leq 2$:

$(x+3) + 2x + (2-x) = 10 \implies 2x + 5 = 10$

$x = 2{,}5 \implies$ RR, ei ratk.

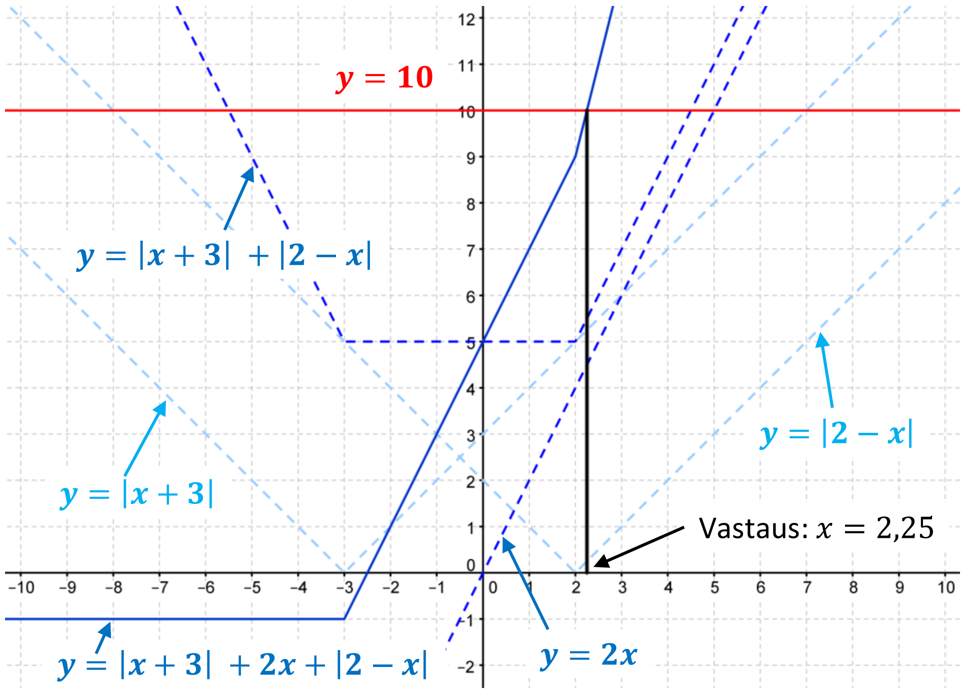
Kun $x > 2$:

$(x+3) + 2x + (x-2) = 10 \implies 4x + 1 = 10$

$x = 2{,}25 \implies$ OK

Vastaus: $x = 2{,}25$

Piirretään vielä lopuksi käyrät $y = 10$ ja $y = |x+3| + 2x + |2-x|$



Esimerkki Piirrä/Hahmota kuvaaja $\big||x-1|-2\big|-3\big|$.
Aloitetaan $|x-1|$:stä, sitten vähennetään 2, eli käyrä $y = |x-1| - 2$. Peilataan neg.osa x-akselin suhteen, eli käyrä $y = \big||x-1|-2\big|$. Vähennetään 3, eli käyrä $y = \big||x-1|-2\big| - 3$ ja peilataan lopuksi jälleen neg.osa x-akselin suhteen, eli käyrä $y = \Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|$.