ANALYYTTINEN GEOMETRIA MAA5

Itseisarvo

Positiivisen luvun x itseisarvo $|x|$ on luku itse. Negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku. Nollan itseisarvo on nolla

Määritelmä, itseisarvo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

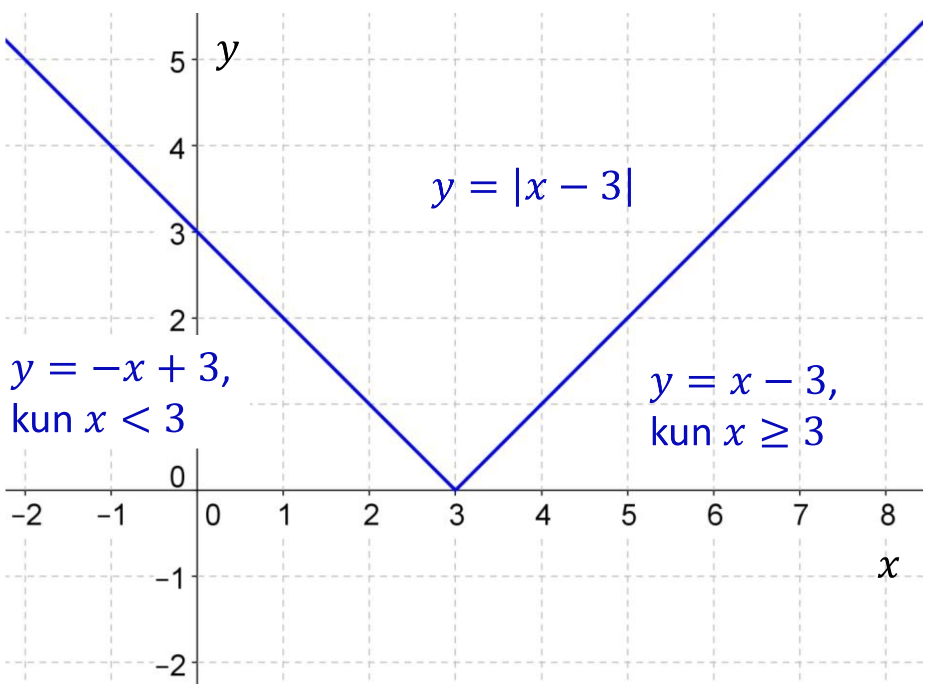
Siis

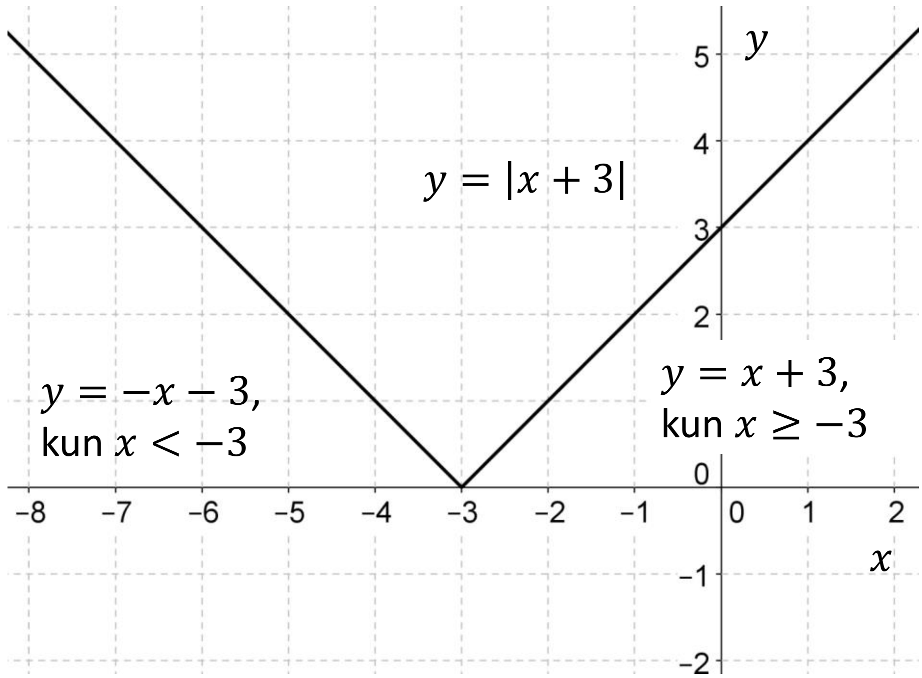
$$|\text{"jotain"}| = \begin{cases} \text{"jotain"}, & \text{kun se "jotain"} \geq 0, \\ -(\text{"jotain"}), & \text{kun se "jotain"} < 0. \end{cases}$$

Esimerkki 1

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{kun } x-3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 3, \\ \underbrace{-(x-3)}_{=3-x}, & \text{kun } x-3 < 0, \text{eli kun } x < 3. \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{kun } x+3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq -3, \\ \underbrace{-(x+3)}_{=-x-3}, & \text{kun } x+3 < 0, \text{eli kun } x < -3. \end{cases}$$





Esimerkki 2

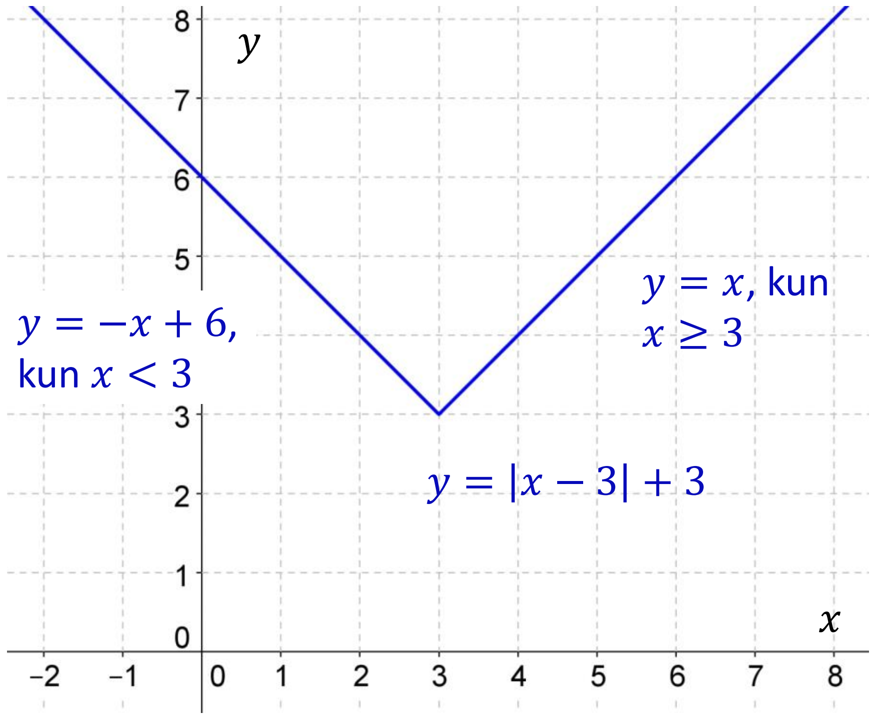
$$|x-3|+3=\begin{cases}\overbrace{x-3+3}^{=x}, & \text{kun } x-3\geq 0, \text{eli kun } x\geq 3,\\ \underbrace{\underbrace{-(x-3)}_{=3-x}+3}_{=6-x}, & \text{kun } x-3<0, \text{eli kun } x<3.\end{cases}$$

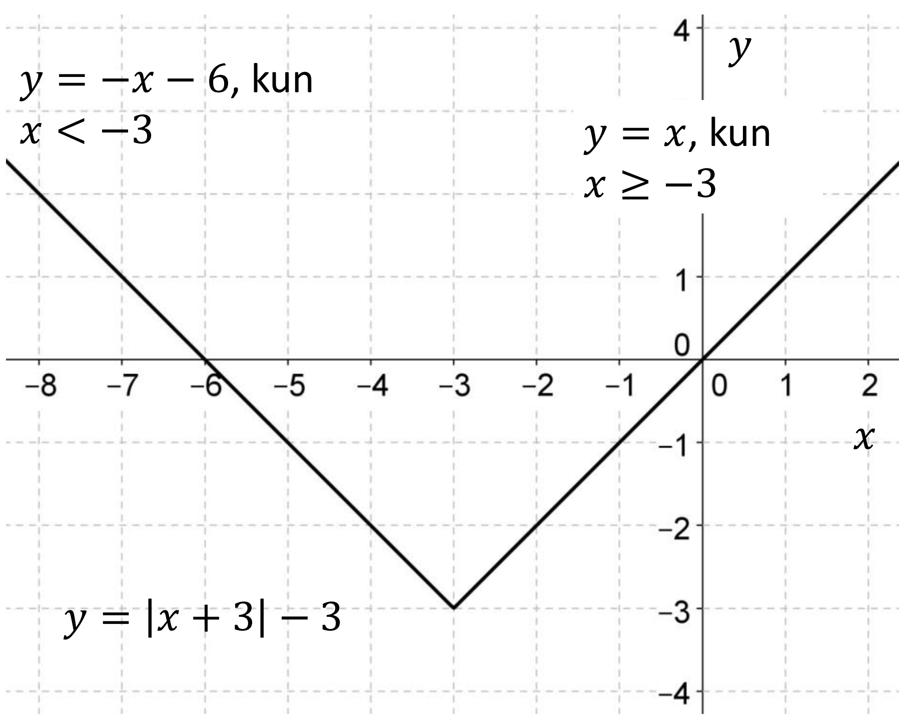
$$=\begin{cases}x, & x\geq 3,\\ 6-x, & x<3.\end{cases}$$

$$|x+3|-3=\begin{cases}\overbrace{x+3-3}^{=x}, & \text{kun } x+3\geq 0, \text{eli kun } x\geq -3,\\ \underbrace{\underbrace{-(x+3)}_{=-x-3}-3}_{=-x-6}, & \text{kun } x+3<0, \text{eli kun } x<-3.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & x\geq -3,\\ -x-6, & x<-3.\end{cases}$$

Huomaa itseisarvon vaikutus vain itseisarvomerkkien sisäpuoliseen lausekkeeseen!


y
$y = x$, kun
$x \geq 3$
$y = -x + 6$,
kun $x < 3$
$y = |x - 3| + 3$
x
8
7
6
5
3
2
1
0
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8


y
$y = -x - 6$, kun
$x < -3$
$y = x$, kun
$x \geq -3$
$y = |x + 3| - 3$
x
4
1
0
−1
−2
−3
−4
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2

Lause, itseisarvon ominaisuuksia:

1. Luvun itseisarvo on ei-negatiivinen, $|a| \geq 0, a \in \mathbb{R}$.
2. Nollan ja vain sen itseisarvo on nolla, $|a| = 0 \iff a = 0$. Muista itseisarvon etäisyystulkinta! Negatiivinen etäisyys ei-mielekäs.
3. Luku on enintään itseisarvonsa suuruinen, $a \leq |a|$.
4. Luvulla ja luvun vastaluvulla on sama itseisarvo, $|a| = |-a|$.
5. Luvun itseisarvon neliö ja luvun neliö ovat yhtä suuret, $|a|^2 = a^2$.
6. Tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo, $|ab| = |a||b|$.
7. Osamäärän itseisarvo on itseisarvojen osamäärä, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0.$
8. *Kolmioepäyhtälö*: Summan itseisarvo on enintään yhtä suuri kuin itseisarvojen summa, $|a + b| \leq |a| + |b|$ kaikilla luvuilla a ja b.

Δ $-$ey. Tarkoittaa siis sitä, että lukujen summan ”etäisyys” nollasta on enintään summattavien lukujen ”etäisyyksien” (nollasta) summa. Vektorikurssilla tämä selkiytyy!

Esimerkki 3
Koska jokaisen luvun neliö on ei-negatiivinen, on $|x^2| = x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Toisaalta koska $2x^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, on myös

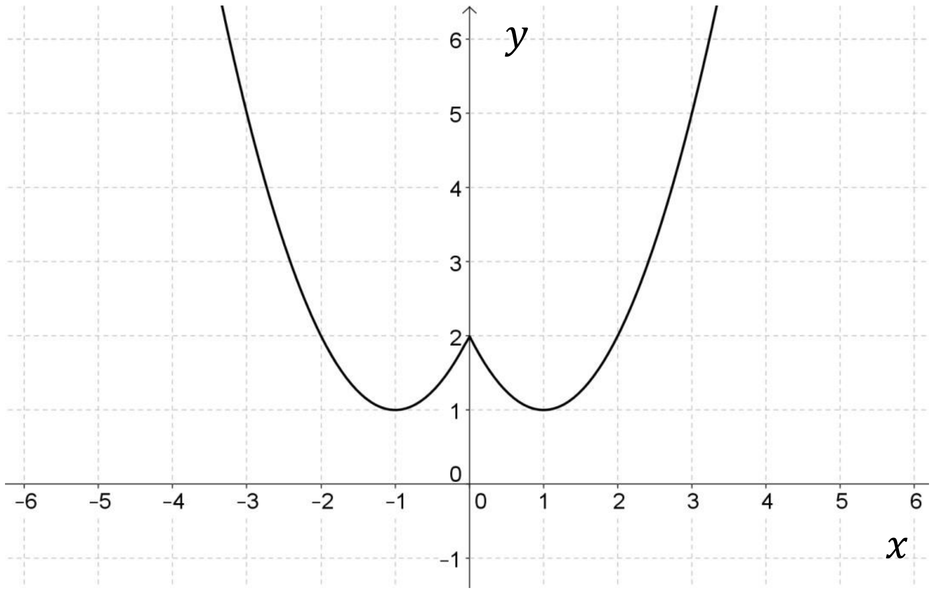
$$|2x^2 + 1| = 2x^2 + 1, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 4
Määritä funktion $f: f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ pienin arvo.
Koska $|x|^2 = x^2$, saadaan

$$f(x) = |x|^2 - 2|x| + 1 + 1 = (|x| - 1)^2 + 1.$$

Neliö $(|x| - 1)^2$ saa pienimmän arvonsa nollakohdissa $x = \pm 1$, joten funktion f pienin arvo tulee olemaan

$$f(\pm 1) = 0 + 1 = 1.$$



$$y = x^2 - 2|x| + 2$$

Itseisarvo etäisyytenä

Luvun itseisarvo ilmoittaa luvun *etäisyyden* origosta. Itseisarvon useampiulotteinen vastine on *normi* (tarkemmin euklidinen normi), merkitään tuplapoikkiviivoilla $\|x\|$ ja sen arvo lasketaan Pythagoraan avulla, siis kun $x = (x_1, x_2)$, niin

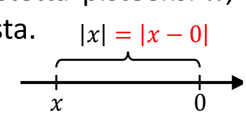
$$\|x\| = \|x\|_2 = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2},$$

ja vastaavasti n-ulotteiselle avaruuden pisteelle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\|x\| = \|x\|_n = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ \dots + {x_n}^2}.$$

HUOM! ”Normi”asiaa ei kysytä kokeessa → lähinnä tiedoksi.

Jos kutsutaan luvun x lukusuoralla olevaa vastinpistettä pisteeksi x, niin itseisarvo $|x|$ ilmoittaa pisteen etäisyyden origosta.



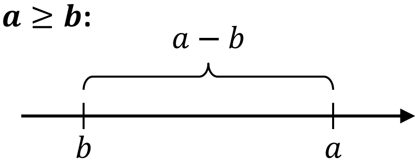
Esimerkki 1 **a)** Pisteen 3 etäisyys origosta on 3 ja vast. pisteen -4 etäisyys origosta on 4. **b)** Pisteen 5 etäisyys pisteestä 1 vast. -3 on $|5 - 1| = 4$ ja $|5 - (-3)| = 8$.

Pisteiden a ja b välisen janan pituus eli pisteiden a ja b etäisyys on

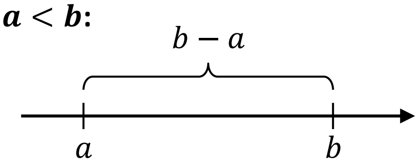
$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{kun } a-b \geq 0 \\ -(a-b), & \text{kun } a-b < 0 \end{cases},$$

$$= \begin{cases} a-b, & \text{kun } a-b \geq 0 \text{ eli kun } a \geq b \\ b-a, & \text{kun } a-b < 0 \text{ eli kun } a < b \end{cases}.$$

$\boldsymbol{a \geq b}$**:**



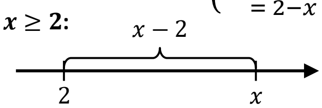
$\boldsymbol{a < b}$**:**



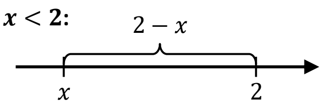
Esimerkki 2 Pisteiden x ja 2 välisen janan pituus on $|x-2|$.
Jos $x \geq 2$, niin janan pituus on $x-2$ ja jos $x < 2$, niin janan pituus on $2-x$, siis

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{kun } x-2 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 2 \\ \underbrace{-(x-2)}_{=2-x}, & \text{kun } x-2 < 0, \text{eli kun } x < 2 \end{cases}.$$

$\boldsymbol{x \geq 2}$**:**

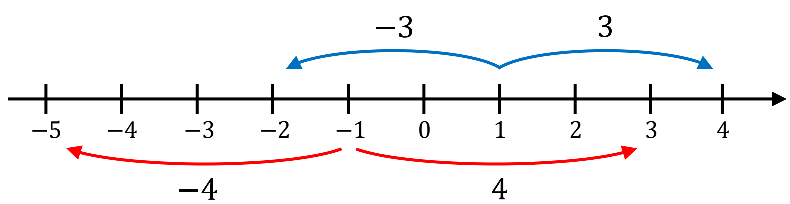


$\boldsymbol{x < 2}$**:**



Esimerkki 2 Määritä ne lukusuoran pisteet x, jotka ovat **a)** etäisyydellä 3 pisteestä 1 ja **b)** etäisyydellä 4 pisteestä -1.

a)

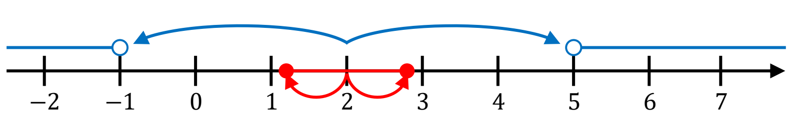


b)

a) Siis $|x-1| = 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-1=3, & \text{kun } x \geq 1 \\ -(x-1) = 1-x = 3, & \text{kun } x < 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}.$

b) Siis $x = -1+4 = 3$ tai $x = -1-4 = -5 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}.$

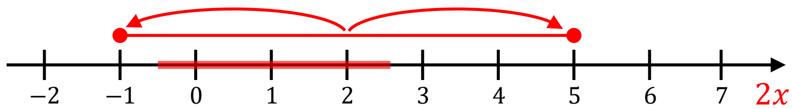
Esimerkki 3 Määritä ne lukusuoran pisteet x, joilla **a)** $|x-2| > 3$ ja **b)** $|x-2| \leq 0{,}8$. Huomaa onko yhtäsuuruus mukana vai ei!



a) $x > 5$ tai $x < -1$ **b)** $1{,}2 \leq x \leq 2{,}8$.

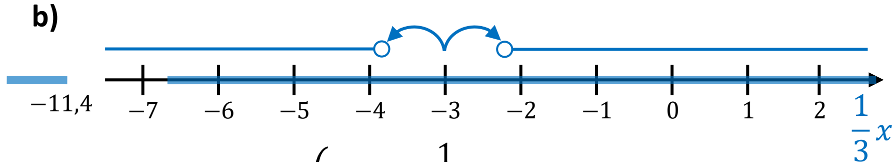
Esimerkki 3 Määritä ne lukusuoran pisteet x, joilla **a)** $|2x-2| \leq 3$ ja **b)** $\left|\frac{1}{3}x+3\right| = \left|\frac{1}{3}x-(-3)\right| > 0{,}8.$

a)



$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = 2x \\ -1 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = {}^{5}/_{2} = 2{,}5 \\ x = {}^{-1}/_{2} = -0{,}5 \end{cases}$$

b)



$$\Rightarrow \begin{cases} -2{,}2 = \dfrac{1}{3}x \\ -3{,}8 = \dfrac{1}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ \ -6{,}6 \\ x = -11{,}4 \end{cases}$$

a) $-0{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ **b)** $x > -6{,}6$ tai $x < -11{,}4$

YHTEENVETOA:

$$|ax - b| = c$$

Vakio c antaa etäisyyden tarkastelukohdasta

Kerroin a antaa skaalauksen, eli ”venyttää” / ”kutistaa” x-akselia

Vakio b antaa tarkastelukohdan

$$|\text{"jotain"}| = \begin{cases} \text{"jotain"}, & \text{kun se "jotain"} \geq 0 \\ \text{ovat eri } \updownarrow & \text{ovat samat } \updownarrow \\ -(\text{"jotain"}), & \text{kun se "jotain"} < 0 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{kun } x-3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 3, \\ \text{ovat eri } \updownarrow & \updownarrow \text{ ovat samat} \\ 3-x, & \text{kun } x-3 < 0, \text{eli kun } x < 3 \end{cases}$$

Itseisarvolausekkeen vaihtumiskohta