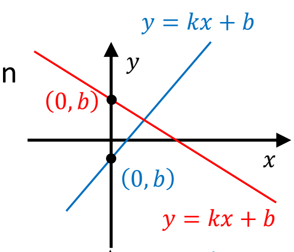
Suoran yhtälöt

ANALYYTTINEN GEOMETRIA MAA5

Suoran ratkaistu ja yleinen muoto:
Suoran yhtälö *ratkaistussa*, eli *eksplisiittisessä muodossa*, on

$$y = kx + b, \qquad \text{tai} \qquad x = a$$

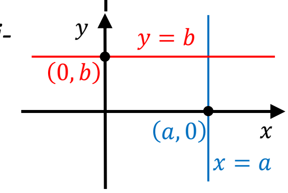
missä vakiotermi b ilmoittaa suoran ja y-akselin leikkauskohdan, eli pisteen $(0, b)$.



Kun vakiotermi $b = 0$, niin suora kulkee origon kautta. Huomaa, että

$$y = y(x) = kx + b.$$

Siis y on *riippuva* ja x *riippumaton* muuttuja.



Suoran yhtälö *ratkaisemattomassa*, eli *implisiittisessä muodossa*, on

$$ax + by + c = 0, \qquad a \text{ tai } b \neq 0$$

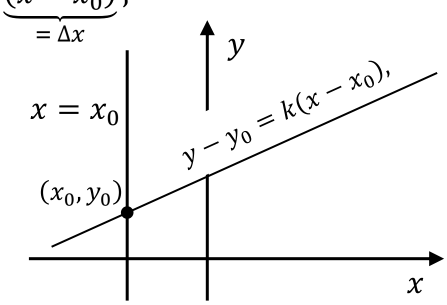
Tätä sanotaan myös suoran *yleiseksi muodoksi*.

Lause, Suoran yhtälö, kun tunnetaan sen yksi piste ja kulmakerroin:
Pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$\underbrace{y - y_0}_{=\Delta y} = k\,\underbrace{(x - x_0)}_{=\Delta x},$$

missä k on suoran kulmakerroin.

Jos suoralla ei ole kulmakerrointa, suora on y-akselin suuntainen ja sen yhtälö on $x = x_0$.



Esimerkki Suora kulkee pisteen $(-3,4)$ kautta. Määritä suoran yhtälö, kun sen kulmakerroin on **a)** -2, **b)** 0.

a) Suoran yhtälö on $y - 4 = -2\big(x - (-3)\big)$, eli $y = -2x - 2$.
b) Suora on x-akselin suuntainen, joten sen yhtälö on

$$y - 4 = 0 \cdot \big(x - (-3)\big) \quad \Rightarrow \quad y = 4.$$

Esimerkki Suorat l ja s kulkevat pisteen $(-1{,}5)$ kautta. Suoran l suuntakulma on $60°$ ja suoran s suuntakulma $-45°$. Määritä suorien yhtälöt.

Suoran l kulmakerroin $k_l = \tan 60° = \sqrt{3}$ ja suora kulkee annetun pisteen $(-1{,}5)$ kautta. Sen yhtälö on näin ollen

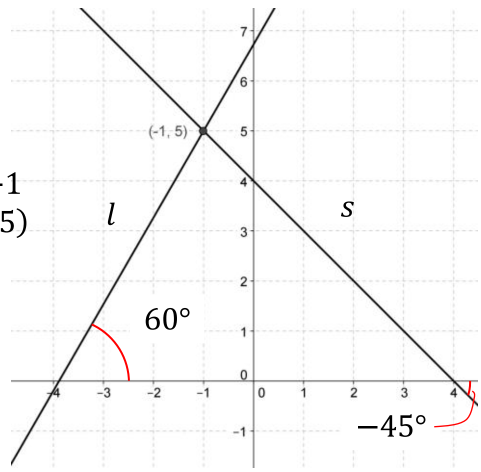
$$y - 5 = \sqrt{3} \cdot \big(x - (-1)\big)$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 5.$$

Suoran s kulmakerroin
$k_s = \tan(-45°) = -\tan 45° = -1$
ja suora kulkee pisteen $(-1{,}5)$ kautta.
Sen yhtälö on

$$y - 5 = -1 \cdot \big(x - (-1)\big)$$

$$\Rightarrow \quad y = -x + 4.$$

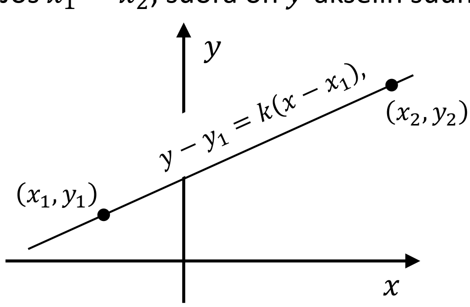


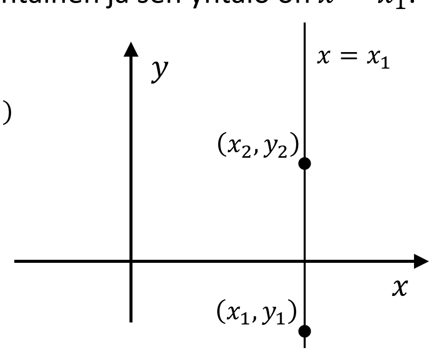
Lause, Suoran yhtälö, kun tunnetaan sen kaksi pistettä:
Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), missä $x_1 \neq x_2$, kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad \text{missä } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{tai} \qquad y - y_2 = k(x - x_2)$$

Jos $x_1 = x_2$, suora on y-akselin suuntainen ja sen yhtälö on $x = x_1$.





Eli ensin määritetään kulmakerroin ja sitten suoran yhtälö (ei ole väliä käyttääkö kumpaa tunnettua suoran pistettä).

Esimerkki Määritä pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran yhtälö, kun **a)** $A = (-2, -1)$ ja $B = (1,5)$, **b)** $A = (-2, 1)$ ja $B = (-2,4)$.

a) Aluksi

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{1 - (-2)} = \frac{6}{3} = 2\,.$$

Suoran yhtälö on näin ollen

$$y - 5 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 2 + 5 = 2x + 3\,.$$

Entäpä jos otetaan toinen piste. Tällöin (kulmakerroin pysyy samana)

$$y - (-1) = 2\big(x - (-2)\big) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 4 - 1 = 2x + 3\,.$$

b) Kuten a)-kohdassa

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{-2 - (-2)} = \frac{3}{0} = \text{"}\infty\text{"}\,.$$

Ja viimeistään nyt havaitaan, että x-koordinaatit ovat samoja.

Siis suoran yhtälö on näin ollen

$$x = -2\,.$$

Suoraparvet ja suoran parametrimuoto

Palataan vielä hetkeksi suoran yleiseen muotoon

$$ax + by + c = 0, \qquad a \text{ tai } b \neq 0.$$

Tätä suoran yhtälö sanotaan myös *lineaariseksi yhtälöksi*.

Esimerkki Suoran $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$ yhtälö on yleisessä muodossa

$$6x + 10y - 5 = 0.$$

Suorien $x = -2$ ja $y = -\frac{4}{7}$ yhtälöt yleisessä muodossa ovat vastaavasti $x + 2 = 0$ ja $7y - 4 = 0$.

Kääntäen lineaarisen yhtälön kuvaaja on aina suora! Kun $b \neq 0$, niin

$$ax + by + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Esimerkki Määritä sen suoran yhtälö, joka on suoran

$$2x - 3y + 5 = 0$$

suuntainen ja kulkee pisteen $(-2,3)$ kautta.

Tapa 1 Suoran $2x - 3y + 5 = 0$ eli suoran $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ kulmakerroin on $\frac{2}{3}$. Täten kysytyn suoran kulmakerroin on siis $\frac{2}{3}$. Saadaan yhtälö

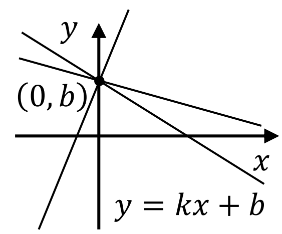
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x + 2) \implies 3y - 9 = 2x + 4 \iff 2x - 3y + 13 = 0.$$

Tapa 2 Kysytty yhtälö on muotoa $2x - 3y + c = 0$, missä c on tietty vakio. Koska piste $(-2,3)$ on tällä suoralla se toteuttaa suoran yhtälön, eli on suoralla, siis

$$2 \cdot (-2) - 3 \cdot (3) + c = 0 \implies c = 13 \implies 2x - 3y + 13 = 0.$$

Suoraparvet

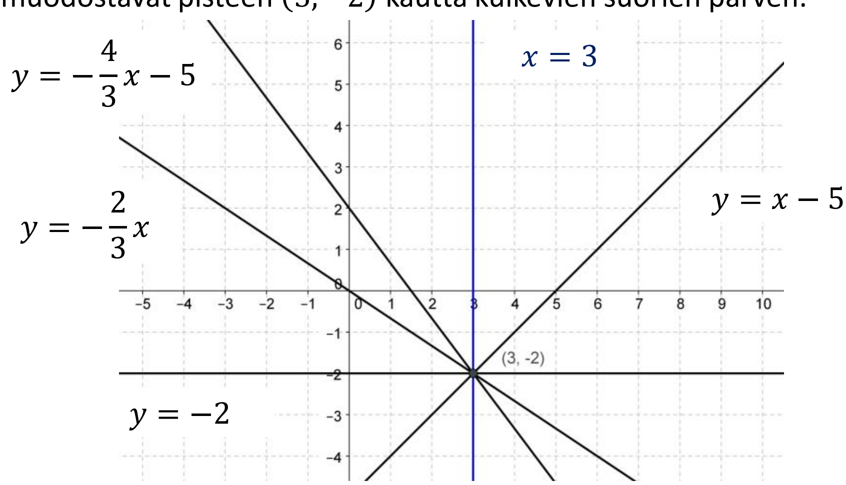
Pisteen $(0, b)$ kautta kulkevat suorat muodostavat suoraparven. Tähän parveen kuuluvan suoran yhtälö on $y = kx + b, k \in \mathbb{R}$, kun suora ei ole y-akselin suuntainen, ja $x = 0$, kun se on y-akselin suuntainen (eli y-akseli).



Esimerkki Pisteen $(3, -2)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on joko muotoa $y + 2 = k(x - 3)$ tai $x = 3$. Antamalla parametrille (muuttujalle) k jonkin arvon, esimerkiksi $k = 2$, saadaan täysin määrätty suora

$$y + 2 = 2(x - 3) = 2x - 6 \implies y = 2x - 8 \iff -2x + y + 8 = 0.$$

Parametrin k eri arvoja vastaavat suorat yhdessä suoran $x = 3$ kanssa muodostavat pisteen $(3, -2)$ kautta kulkevien suorien parven.



Määritelmä/lause:
Pisteen (a, b) määräämä suoraparvi muodostuu suorista, joiden yhtälö on muotoa

$$y - b = k(x - a), \qquad k \in \mathbb{R} \qquad \text{tai} \qquad x = a.$$

Suoran parametrimuoto

Pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan suoran, kulmakerroin k, yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Merkitään $k = \frac{b}{a}$, jolloin $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \implies \frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a}$ kunhan $a, b \neq 0$. Jos toinen luvuista a, b on nolla, niin saadaan akseleiden suuntaiset suorat. Esim. $a = 0$ saadaan y-akselin suuntainen suora.

Yhtälössä $\frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a}$ voidaan molempia osamääriä merkitä parametrilla t, siis

$$\frac{y - y_0}{b} = t, \qquad \frac{x - x_0}{a} = t$$

Kun ratkaistaan x ja y, saadaan suoran *parametrimuoto*.

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki T–57 Lausu yleisessä muodossa suoran $\begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = \frac{1}{2} - 2t \end{cases}$ yhtälö.

$$\begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = \dfrac{1}{2} - 2t \end{cases} \implies \begin{cases} x - 7 = -3t \\ y - \dfrac{1}{2} = -2t \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{x - 7}{-3} = t \\ \dfrac{y - \frac{1}{2}}{-2} = t \end{cases}$$

$$\implies \frac{y - 0{,}5}{-2} = \frac{x - 7}{-3} \implies y - 0{,}5 = \frac{2}{3}(x - 7)$$

$$\implies \qquad y = \frac{2}{3}x - \frac{25}{6} \implies y = \frac{4}{6}x - \frac{25}{6}$$

Ja lopuksi

$$\implies \quad -4x + 6y + 25 = 0$$

Mallintamistehtävä

Esimerkki:
Lämpötilaa t (°C) voi meren pinnan yläpuolella pitää korkeuden h (m) suhteen ensimmäisen asteen polynomifunktiona. Määritä muuttujien h ja t välinen yhtälö, kun 500 metrin korkeudella lämpötila on 15°C ja 10000 metrin korkeudella -80°C. Piirrä kuvaaja korkeuden funktiona.

Ensimmäisen asteen polynomifunktiota voidaan pitää suoran yhtälönä. Koska lämpötila t riippuu korkeudesta h, niin se on korkeuden funktio

$$t = t(h) = k \cdot h + b, \qquad \text{vertaa} \qquad y = k \cdot x + b.$$

Tiedetään siis suoran kaksi pistettä $(500,15)$ ja $(10000,-80)$. Lasketaan ensin kulmakerroin: (Onko suora laskeva vai nouseva?)

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-80-15}{10000-500} = \frac{-95}{9500} = -\frac{1}{100} = -0{,}01.$$

Siis laskeva. Nyt voidaan määrittää suora, sillä tiedetään kulmakerroin ja eräs suoran piste (itse asiassa 2 suoran pistettä, mutta yksi riittää).

Suoran yhtälö on

$$t - 15 = -0{,}01(h - 500)$$

$$\Longrightarrow \quad t = -0{,}01 \cdot h + 5 + 15 \qquad \Longrightarrow \quad y = -0{,}01 \cdot h + 20$$

ja kuvaaja korkeuden funktiona.