

# Analyttinen geometria – johdantoa

ANALYTTINEN  
GEOMETRIA MAA5

Harpilla ja viivaimella sekä geometrisella todistamisella päästiin geometriassa hyvään alkuun. Toisaalta ratkaisutavat ovat usein melko työläitä ja/tai hitaita. Konstruoi vaikka säännöllinen 5-kulmio (netti).

Analyttisen geometrian voidaan katsoa syntyneen, kun ranskalainen filosofi ja luonnontieteilijä Descartes otti käyttöön karteesisen koordinaatiston. (Analyttinen = perustuu jonkin asian erittelyyn/analysointiin).

*Analyttisessä geometriassa kuvioita tarkastellaan koordinaatistoon sijoitettuna pistejoukkoina. Jokaiseen pisteeseen liitetään luvut, eli ns. koordinaatit. Tässä tarkastelussa kuvioiden ominaisuudet tulkitaan yhtälöiksi tai epäyhtälöiksi, jotka ratkaisemalla tulee samalla ratkaistuksi lähtökohtana ollut geometrinen ongelma.*

Analyttisessä geometriassa ratkaistaan siis algebrallisin menetelmin ongelmia, jotka ovat luonteeltaan geometrisia.

**Esimerkki** Piste on annetun kuvion piste, jos sen koordinaatit (eli mitkä...(?), koordinaattejahan ei ole vielä määritetty → ylästeelta palautetaan mieleen) toteuttavat pistejoukon määrittävän yhtälön.

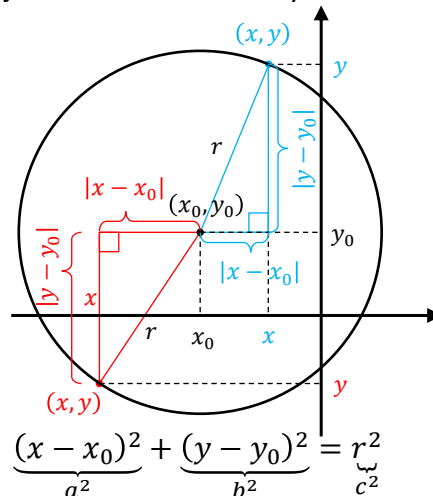
Ympyräviiva eli ympyrän kehä on kaikkien niiden pisteiden joukko, jotka toteuttavat yhtälön

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

missä  $r$  on säde ja piste  $(x_0, y_0)$  on ympyrän keskipiste.

Mitä em. ympyrän yhtälö oikeastaan kertoo tai kuvaa?

Piirretäämpä pari suorakulmaista kolmiota. Havaitaan, että kyseessä on Pythagoraan lause:

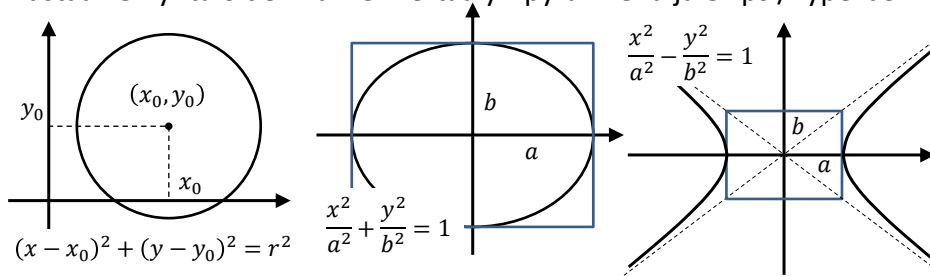


Mitä tästä hyödytään, eli miksi tämä kurssi?

Koska millä tahansa  $x$ :n ja  $y$ :n hyvin määritellyllä yhtälöllä (hyvin määriteltä, eli ei esimerkiksi jaeta nolllalla) on ratkaisujoukko, niin joukkoa yleensä vastaa jokin geometrinen muoto.

Toisin sanoen, hyöty on siinä, että nyt harpin ja viivaimen sijaan voidaan käyttää algebran menetelmiä tutkittaessa geometrista kuviota – eli jotakin yhtälöä!

Muista aina piirtää laskimella yhtälöä vastaava joukko! Usein jo opituista kuvioista saattaa saada/keksiä idean uusien kuvioiden ja niitä vastaavien yhtälöiden välille. Vertaa ympyrän kehä ja ellipsi/hyperbeli.



## René Descartes – Renatus Cartesius

31. 3. 1596 La Haye en Touraine – 11. 2. 1650 Tukholma



## Lyhyt historiakatsaus

Ranska oli 1600 – luvun toisen kolmanneksen matematiikan kiistaton keskus. Tuosta ajasta sanotaan ”..., sillä sitten Platonin päivien ei matematiikan piirissä ollut käyty niin vilkasta ajatustenvaihtoa, kuin 1600 – luvulla.”

Ajan johtohahmot olivat René Descartes ja Pierre de Fermat, mutta kolme muutakin samanaikaista ranskalaista ylsi merkittäviin saavutuksiin: Gilles Persone de Roberval, Girard Desargues ja Blaise Pascal, joista Pascal tunnetaan mm. Pascalin kolmiosta (katso MAOL), mutta myös fysiikan puolelta.

Tutustumme nyt (lyhyesti) Descartesiin.

Descartes syntyi hyvään perheeseen ja sai perusteellisen koulutuksen La Fléchen jesuiittaopistossa. Myöhemmin hän suoritti lakitieteelliset opinnot. Muutaman vuoden ajan hän vaelsi sotilasretkikuntien mukana pitkin Eurooppaa. Hän matkusteli omatoimisesti ja opiskeli tapamiensa Euroopan eri osien johtavien oppineiden johdolla.

Pariisissa hän tapasi Mersennen ja tieteellisen piirin, joka keskusteli avoimen kriittisesti paripateettisesta ajattelusta (eli mistä?). Saadut virikkeet kuitenkin johtivat Descartesin ”modernin filosofian isäksi”.

Descartesin filosofia ja tiede olivat lähes vallankumouksellisia tavassa, jolla ne katkaisivat yhteydet menneisyyteen. Hänen matematiikkansa taas liittyi aikaisempaan perinteeseen. Descartes kiinnostui matematiikasta vakavasti, kun hän vietti jäisen talven Baijerin armeijassa vuonna 1619. Hänellä oli tapana makailla aamuisin kello kymmeneen ja pohtia probleemoja.

Ei tiedetä, oliko analyttinen geometria kokonaisuudessaan Descartesin käytössä jo vuonna 1628, mutta sen keksimisen ajankohta voi olla tätä myöhäisempi. Noihin aikoihin hän lähti Ranskasta Hollantiin, jossa eräs ystävä kiinnitti hänen huomionsa Pappoksen kolmen ja neljän suoran ongelmaan. Descartes sovelsi uusia menetelmiään ja selvitti tehtävän vaikeuksista. Näin hän havaitsi uuden näkökulmansa voiman ja yleisyyden, minkä seurauksena hän kirjoitti tunnetun työnsä: *La géométrie*, jonka ansiosta analyttinen geometria tuli tunnetuksi.

*La géométrie* ei ollut erillinen teos vaan eräs liite tunnetusta ”*Méthodique*” julkaisusta.

Kartesiolainen geometria tarkoittaa nykyään samaa kuin analyyttinen geometria, mutta Descartesin alkuperäinen tarkoitus oli kaukana nykyisten oppikirjojen tavoitteista. Hänen teemansa paljastuu *La géométrie*’n avauslauseesta:

*Jokainen geometrian ongelma on helppo muuntaa sellaiseen muotoon, että tiettyjen janojen pituuksien tuntemus riittää sen konstruointiin.*

Tämä lause viittaa siihen, että yleisellä tasolla teoksen tavoite on geometrinen konstruktio eikä geometrian pelkistäminen algebraksi. Descartesin työ tulkitaan aivan liian usein yksinkertaisesti algebran soveltamiseksi geometriaan, vaikka sitä voidaan yhtä hyvin luonnehtia algebrallisten operaatioiden kääntämiseksi geometrian kielelle.

Descartesin merkinnät muistuttavat omiamme. Esim. aakkosten alkupään kirjaimet kuvaavat parametreja ja loppupään muuttujia.

Descartesin lähtökohdissa oli kuitenkin yksi tärkeä ero meihin verrattuna. Me, nimittäin pidämme sekä parametreja että tuntemattomia lukuina, mutta Descartes kuvitteli ne janoiksi.

Matemaattisilla taidoilla mitaten Descartes oli luultavasti aikansa kyvykkäin ajattelijana, mutta sydämeltään hän ei ollut matemaatikko. Hänen geometriansa oli vain tieteelle ja filosofialle omistetun elämän erään vaiheen tulos.

Vuonna 1649 hän hyväksyi Ruotsin kuningatar Kristiinan kutsun saapua opettamaan tälle filosofiaa ja perustamaan Tukholmaan tiedeakatemiaa. Descartesin terveys ei ollut koskaan ollut hyvä ja Skandinavian talven ankaruus oli hänelle liikaa. Hän kuoli vuoden 1650 alussa.

Descartesin tunnetuin ajatus on *Cogito ergo sum* ("Ajattelen, siis olen").

Lisää Descartesista voi lukea esim. kirjasta Carl Boyer: *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia, osa II*.