Esimerkki: MAA5/ympyrän keskipisteen & paraabelin huipun määrittäminen

1) Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ keskipiste.

Muutetaan ympyrän yhtälö yleisestä- eli polynomimuodosta $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ keskipistemuotoon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Alkuperäinen yhtälö: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$

Siirretään vakiotermi oik. puol.: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = -15$

Vaihdetaan termien järjestystä: $\underbrace{(x^2 - 6x + ?)}_{= (x+?)^2} + \underbrace{(y^2 + 8y + ?)}_{= (y+?)^2} = -15$

Täydennetään neliöksi: $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -15 + 9 + 16$

Binomin neliö: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 10$

Keskipiste on siis $(3, -4)$ ja säde $r = \sqrt{10}$.

Miten $x^2 - 6x$:sta saadaan muoto $a^2 - 2ab$ ja tekijä b ratkaistua?

$$\overbrace{(x^2 - 6x + ?)}^{=a^2 - 2ab + b^2} = x^2 - 2 \cdot \overbrace{3}^{=b} \cdot \overbrace{x}^{=a} + 3^2 = x^2 - 6x + 9, \qquad \Rightarrow \qquad b = 3.$$

2) Määritä paraabelin $x^2 - 6x + 8y - 3 = 0$ huippupiste, aukeamissuunta ja symmetria-akseli.

Aluksi havaitaan, että muuttujalla x on toisen asteen termi ja muuttujalla y vain ensimmäisen asteen termi, eli kyseessä on joko ylös tai alaspäin aukeava paraabeli.

Muutetaan paraabelin yhtälö muodosta $y = ax^2 + bx + c$ huippupistemuotoon $y - y_0 = a(x - x_0)^2$.

Alkuperäinen yhtälö: $x^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

Siirretään x:ää sisältävät termit oik. puol.: $8y - 3 = -x^2 + 6x$

Jaetaan y-termin kertoimella: $y - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{6}{8}x$

Otetaan x^2-termin kerroin yhteiseksi tekijäksi: $y - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}(x^2 - 6x)$

Täydennetään neliöksi: $y - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}\underbrace{(x^2 - 6x + ?)}_{= (x+?)^2}$

Binomin neliö: $y - \frac{3}{8} - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}\underbrace{(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9)}_{= (x-3)^2}$

Loppusievennys: $y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}(x - 3)^2$

Huippupiste on siis $\left(3, \frac{3}{2}\right)$, aukeamissuunta ALAS ja symmetria-akseli on $x = 3$.

Harjoittelutehtäviä

a) Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 4x + 5y = -9$ keskipiste ja säde.

kp: $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ ja säde on $r = \sqrt{1\frac{1}{4}}$.

b) Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 16x + \sqrt{8}y - 7 = 0$ keskipiste ja säde. VIHJE: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

kp: $\left(?\,, -\sqrt{2}\right)$ ja säde on $r = \sqrt{73}$.

c) Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + y - 1 = 0$ keskipiste ja säde.

kp: $\left(?\,, -\frac{?}{2}\right)$ ja säde on $r = \frac{\sqrt{?}}{2}$.

d) Määritä paraabelin $-2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ huippupiste, aukeamissuunta ja symm.-akseli.

huipp.: $\left(-\frac{1}{6}, -1\right)$, VASEN, symm.akseli $y = -1$ (muista lisätä vakio yhtälön molem. puolille)

e) Määritä paraabelin $x^2 + 3x + 8y - 5 = 0$ huippupiste, aukeamissuunta ja symm.-akseli.

huipp.: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{29}{32}\right)$, ALAS, symm.akseli $x = -\frac{3}{2}$.

f) Määritä paraabelin $-x^2 - 7y - 2 = 0$ huippupiste, aukeamissuunta ja symm.-akseli.

huipp.: $\left(?\,, -\frac{2}{7}\right)$, ?, symm.akseli $x =?$.

RATKAISUT: Hyödynnetään neliöön täydentämistä:

a)

$$x^2+y^2-4x+5y=-9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+y^2+5y=-9$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}+\underbrace{y^2+5y+\tfrac{25}{4}}_{\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}=-9+4+\tfrac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+\left(y+\tfrac{5}{2}\right)^2=\tfrac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+\left(y+\tfrac{5}{2}\right)^2=\left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Siis, keskipiste on $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ ja säde $\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1\frac{1}{4}}$.

b)

$$x^2+y^2-16x+\sqrt{8}y-7=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-16x+y^2+2\sqrt{2}y=7$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2-16x+64}_{(x-8)^2}+\underbrace{y^2+2\sqrt{2}y+2}_{(y+\sqrt{2})^2}=7+64+2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-8)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=73$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-8)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{73}\right)^2$$

Siis, keskipiste on $\left(8,-\sqrt{2}\right)$ ja säde $\sqrt{73}$.

c)

$$x^2+y^2+y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-0)^2+y^2+\underbrace{2\cdot\tfrac{1}{2}}_{=1}\cdot y=1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-0)^2+\underbrace{y^2+y+\tfrac{1}{4}}_{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}=1+\tfrac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-0)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Siis, keskipiste on $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ ja säde $\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1\frac{1}{4}}$.

d)

$$-2y^2-6x-4y-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x-3=2y^2+4y$$
$$\Leftrightarrow \quad x+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{3}y^2-\tfrac{2}{3}y$$
$$\Leftrightarrow \quad x+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{3}(y^2+2y)$$
$$\Leftrightarrow \quad x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}=-\tfrac{1}{3}(y^2+2y+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x+\tfrac{1}{6}=-\tfrac{1}{3}(y+1)^2$$

Siis, huippupiste on $\left(-\frac{1}{6},-1\right)$, aukeamissuunta VASEN ja symmetria-akseli $y=-1$.

e)

$$x^2+3x+8y-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad 8y-5=-x^2-3x$$
$$\Leftrightarrow \quad y-\tfrac{5}{8}=-\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{3}{8}x$$
$$\Leftrightarrow \quad y-\tfrac{5}{8}=-\tfrac{1}{8}(x^2+3x)$$
$$\Leftrightarrow \quad y-\tfrac{5}{8}-\tfrac{9}{32}=-\tfrac{1}{8}\left(x^2+3x+\tfrac{9}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad y-\tfrac{29}{32}=-\tfrac{1}{8}\left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2$$

Siis, huippupiste on $\left(-\frac{3}{2},\frac{29}{32}\right)$, aukeamissuunta ALAS ja symmetria-akseli $x=-\frac{3}{2}$.

f)

$$-x^2-7y-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad -7y-2=-x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y+\tfrac{2}{7}=\tfrac{1}{7}(x-0)^2$$

Siis, huippupiste on $\left(0,-\frac{2}{7}\right)$, aukeamissuunta YLÖS ja symmetria-akseli $x=0$.