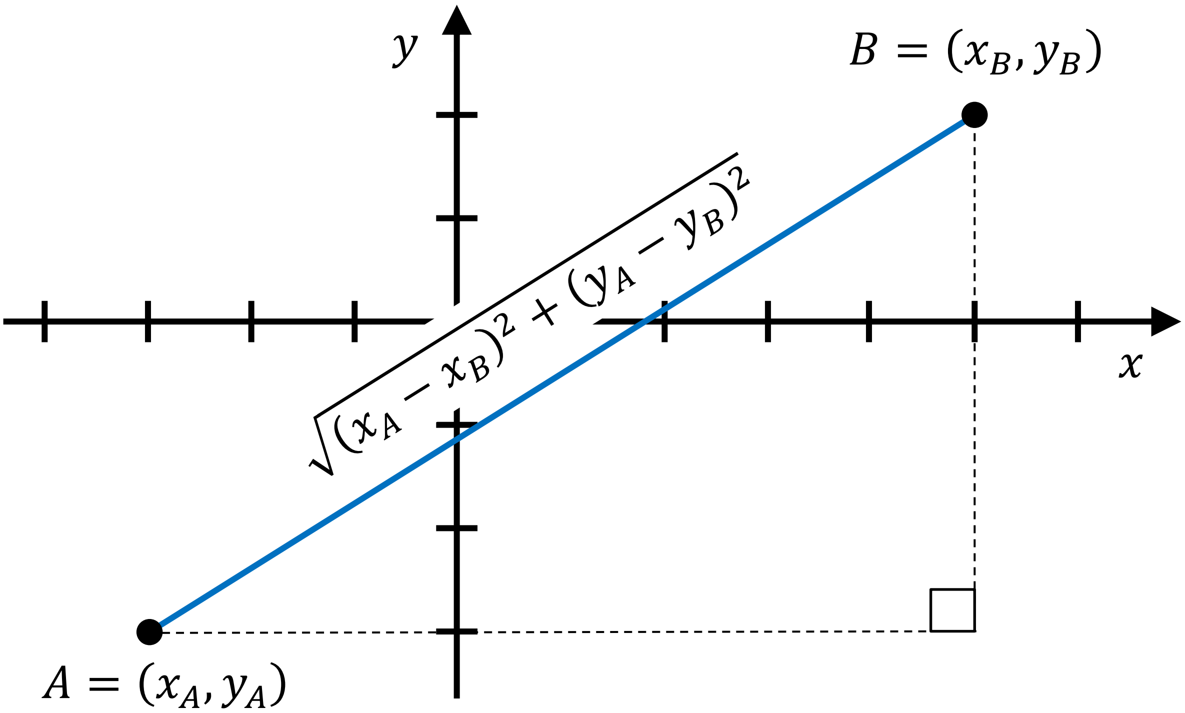
Esimerkki: **Kun ympyrä onkin neliö tai salmiakki!?**

Yleisesti on totuttu mittaamaan etäisyyttä ns. Euklidisen metriikan (metriikka = ”tapa mitata etäisyyttä”) avulla. Eli suomeksi: ”kahden pisteen välinen etäisyys” saadaan Pythagorasta käyttäen:

$$d(A,B) = |A-B| = |B-A| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2},$$

missä d tarkoittaa etäisyyttä (*distance*). Katso kuva alla.



Siis yksittäisen pisteen etäisyys origosta $O = (0,0)$ on

$$d = |(x,y)-O| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}.$$

Edellä käyty Euklidisen metriikan matemaattinen kirjoitustapa on siis

$$d(A,B) = |A-B| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\,.$$

Näin ollen esimerkiksi ympyrän kehä S sisältää kaikki ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana ympyrän keskipisteestä. Kun nyt merkitään keskipistettä

$$O = (x_O, y_O),$$

niin kehä voidaan siis ilmoittaa joukkona seuraavasti (merkitään sädettä r:llä):

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \; |(x,y)-(x_O,y_O)| = r\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \; \sqrt{(x-x_O)^2+(y-y_O)^2} = r\right\}. \end{aligned}$$

Eli, kaikki ne tason $\mathbb{R}^2$ pisteet (x, y), joille pätee ehto $|(x, y) - (x_O, y_O)| = r$ (pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on säde).

Mutta entäs jos vaihdetaan tapaa, jolla etäisyys mitataan.

Tehdään seuraavasti. Määritelläänkin metriikka näin

$$d = |(x, y) - O| = |x| + |y| = |x - 0| + |y - 0|,$$

eli pisteen etäisyys (origosta O) onkin **koordinaattien summa**. Tällöin r-säteinen ympyrä onkin salmiakin muotoinen, sillä

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y) - (x_O, y_O)| = r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_O| + |y - y_O| = r\}. \end{aligned}$$

Ja, kun metriikka määritellään näin

$$d = |(x, y) - O| = \max\{|x|, |y|\} = \max\{|x - 0|, |y - 0|\},$$

eli pisteen etäisyys (origosta O) on **suuremman koordinaatin arvo**, niin tällöin r-säteinen ympyrä onkin neliön muotoinen, sillä

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y) - (x_O, y_O)| = r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{ |x - x_O|, |y - y_O|\} = r\}. \end{aligned}$$