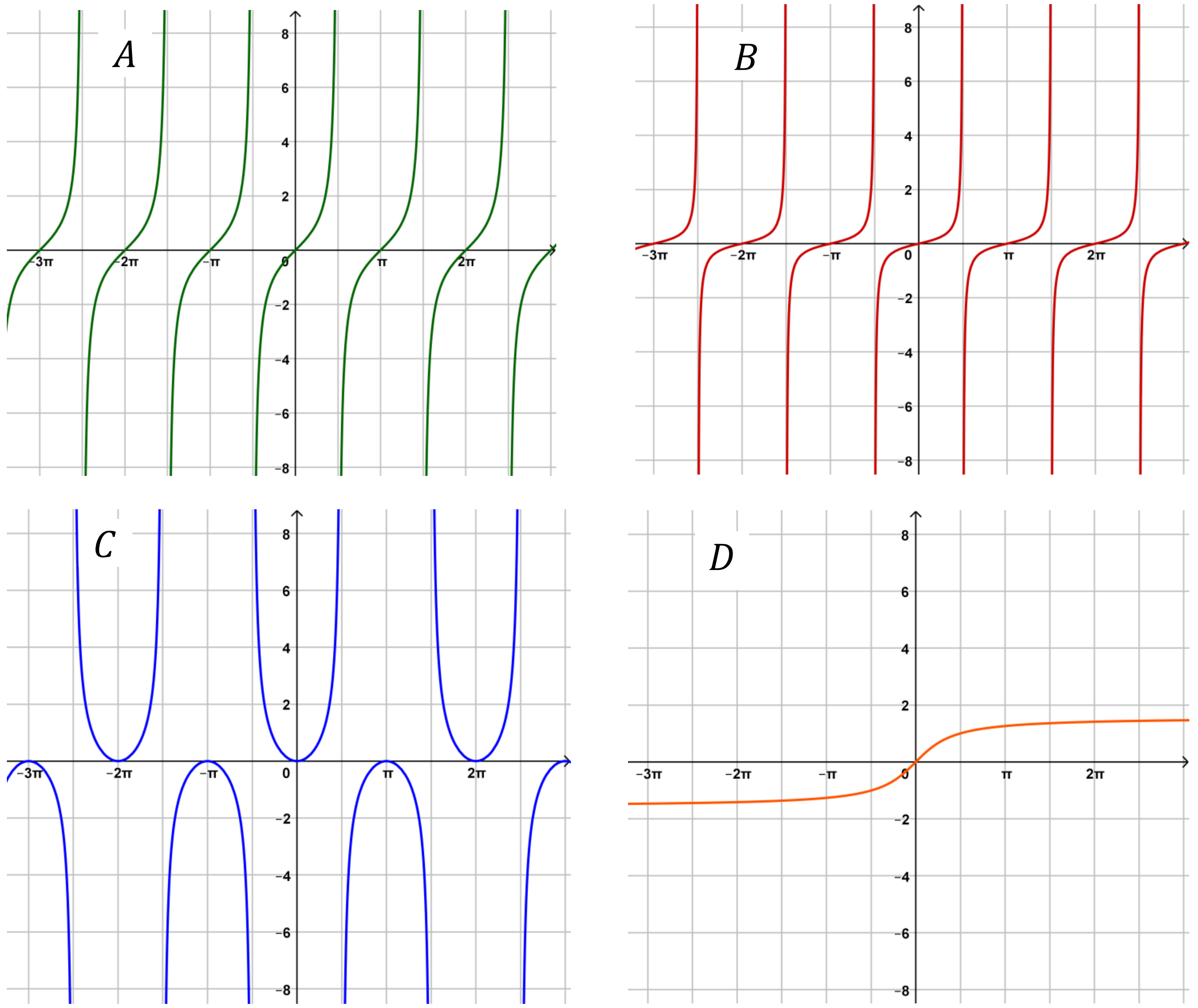
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävä 1 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Yhdistä oikea funktio oikeaan kuvaajaan. **(2p)**

$$f: f(x) = \frac{1}{4}\tan x, \qquad g: g(x) = \tan^{-1} x = \arctan x$$

$$k: k(x) = \tan x, \qquad m: m(x) = \sin x \tan x$$



VASTAUS: $f - B \quad g - D \quad k - A \quad m - C$

Perusteluja: Funktiot k ja f eroavat vain etukertoimella. Kerroin funktiolla f on alle 1, mutta kuitenkin positiivista, joten kuvaajien muoto on melko sama, ”puristuvuus” on funktiolla f isompi. Eli samalla muuttujan x arvolla funktion f arvo on pienempi kuin funktion k. Edelleen funktio g on tulofunktio ja koska sini saa välillä negatiivisia arvoja ja välillä positiivisia, niin kuvaajan C muoto on selvä. Lopuksi tangentin käänteisfunktio eli funktio g, siis arctan tai $\tan^{-1}$, löytyy kuvaajasta D.

b) Määritä/Laske (ei tarvitse tehdä määritelmän kautta). (2p)

i) $D\left(\frac{\tan x}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot D \tan x = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ tai $= \frac{1}{5} \cdot (1 + \tan^2 x)$

ii) $D(\sqrt{3}x \cdot \tan x) = \sqrt{3} \cdot \tan x + \sqrt{3}x \cdot (1 + \tan^2 x) = \sqrt{3}(x \cdot \tan^2 x + \tan x + x)$

(tai $= \sqrt{3} \cdot \tan x + \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \ldots$)

iii) $D\left(\frac{\tan x}{5 \sin x}\right) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 5 \cdot \sin x - \tan x \cdot 5 \cdot \cos x}{(5 \cdot \sin x)^2} = \frac{5 \cdot \tan x\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)}{25 \cdot \sin^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)}{5 \cdot \sin^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{5 \cdot \cos x \sin x}$

$= \frac{\cos x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{5 \cdot \cos x \sin x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{5 \cdot \sin x}$ (sieventämistä voisi jatkaa …)

TAI $D\left(\frac{\tan x}{5 \sin x}\right) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 5 \cdot \sin x - \tan x \cdot 5 \cdot \cos x}{(5 \cdot \sin x)^2} = \frac{5 \cdot \sin x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{(5 \cdot \sin x)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{5 \cdot \sin x}$

TAI koska $\frac{\tan x}{5 \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{5 \sin x} = \frac{1}{5 \cdot \cos x}$, niin $D\left(\frac{\tan x}{5 \sin x}\right) = D\left(\frac{1}{5 \cdot \cos x}\right) = \frac{0 \cdot 5 \cdot \cos x + 1 \cdot 5 \cdot \sin x}{(5 \cdot \cos x)^2} = \frac{\sin x}{5 \cdot \cos^2 x} = \frac{\tan x}{5 \cdot \cos x}$

c) Määritä perustellen $\tan \alpha$, kun $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ja $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Mikäs se tangentin vanha määritelmä nyt olikaan…? (2p)

Koska $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, niin ratkaistaan ensin mitä on $\sin x$. Peruskaavasta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ saadaan

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ja koska $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, niin valitaan negatiivinen arvo. Siis $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja lopuksi tangentti

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

/6

Tehtävästä 2 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

2. a) Ratkaise yhtälöt **(3p)**

i) $\tan 3x = -\sqrt{3}$ ii) $\tan^2 x + 4\tan x = -1$

i)

$$\tan 3x = -\sqrt{3}, \qquad 3x \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \quad \text{eli} \quad x \neq \frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$3x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + n\cdot\frac{\pi}{3}$$

OK, määrittelyehto.

ii) Määrittelyehto on $x \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$. Merkitään $\tan x = y$, muodostuu yhtälö $y^2 + 4y + 1 = 0$.

$$y^2 + 4y + 1 = 0 \quad \overset{\text{laskin}}{\Longrightarrow} \quad y = -2 \pm \sqrt{3}$$

Siis

$$\tan x = -2 - \sqrt{3} \qquad \text{tai} \qquad \tan x = -2 + \sqrt{3}$$

$$x = -\frac{5\pi}{12} + n\cdot\pi \qquad \text{tai} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + n\cdot\pi$$

OK, määrittelyehto.

b) Tiedetään, että $\tan x = -7$. Mitä on $\tan(-17\pi + x)$? **(1p)**

Koska tangentin perusjakso on π, niin

$$\tan(-17\pi + x) = -7.$$

c) Määritä raja-arvo **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}.$$

Miksi ei voida tehdä suoraa sijoitusta?

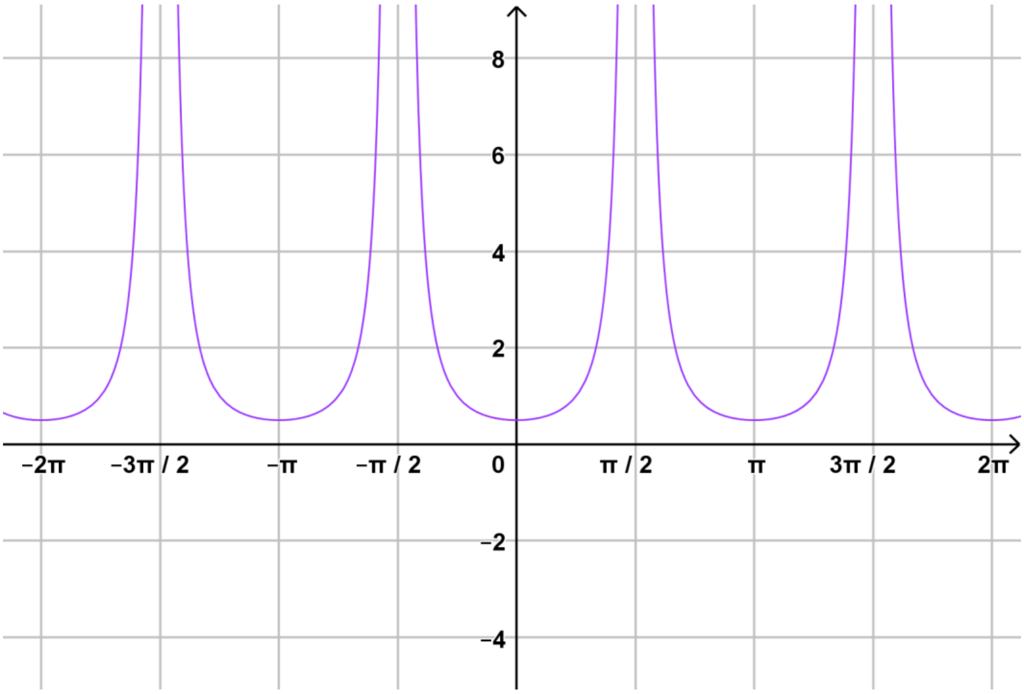
Hahmota lopuksi kuvaaja alla olevaan ruudukkoon välillä $[-2\pi, 2\pi]$.

Suoraa sijoitusta ei voi tehdä, sillä tällöin tulee tilanne $\frac{0}{0}$, jota ei ole määritelty.

Saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

Kuvaaja alla välillä $[-2\pi, 2\pi]$



/6

3. **Ratkaise yhtälö** **(6p)**

$$\tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

ja esitä määrittelyehdot sekä ratkaisukulmat x yksikköympyrää käyttäen.

Tangentin kohdalla tarkistetaan ensin määrittelyehto, $n \in \mathbb{Z}$:

$$4x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad \text{JA} \qquad \frac{\pi}{4} - 2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \text{JA} \qquad -2x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \text{JA} \qquad x \neq -\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ratkaisu:

$$4x = \frac{\pi}{4} - 2x + n \cdot \pi$$

$$6x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{6}$$

Tarkistetaan määrittelyehdot, kielletyt kulmat ovat

$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{17\pi}{8} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{8} \quad \text{ja} \quad -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \mathrel{\widehat{=}} -\frac{\pi}{8},$$

joista havaitaan, että jälkimmäiset sisältyvät ensimmäisten joukkoon.

Sallituista kulmista

$$\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24},\frac{9\pi}{24},\frac{13\pi}{24},\frac{17\pi}{24},\frac{21\pi}{24},\frac{25\pi}{24},\frac{29\pi}{24},\frac{33\pi}{24},\frac{37\pi}{24},\frac{41\pi}{24},\frac{45\pi}{24},\frac{49\pi}{24} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{24}$$

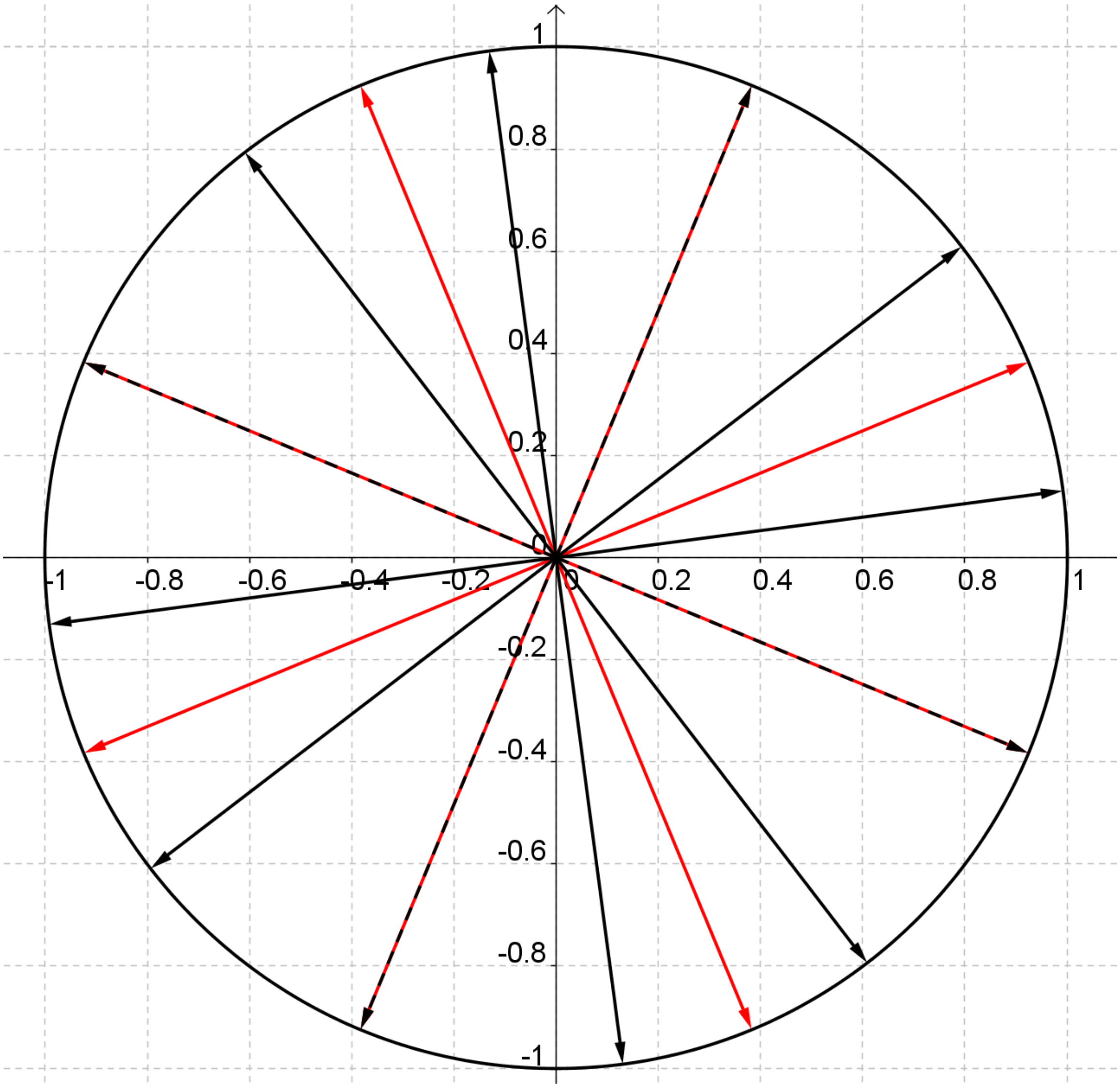
osa kuuluu kiellettyihin, ne ovat

$$\frac{9\pi}{24}=\frac{3\pi}{8},\qquad \frac{21\pi}{24}=\frac{7\pi}{8},\qquad \frac{33\pi}{24}=\frac{11\pi}{8},\qquad \frac{45\pi}{24}=\frac{15\pi}{8}.$$

Näin ollen ratkaisukulmat ovat

$$\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24},\frac{13\pi}{24},\frac{17\pi}{24},\frac{25\pi}{24},\frac{29\pi}{24},\frac{37\pi}{24},\frac{41\pi}{24}$$

täydet kierrokset huomioiden. Kuva alla.



/6

4. **Funktion $f: f(x) = 2\tan x - 3\cos x$ kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteeseen asetetaan tangentti ja normaali. Määritä normaalin ja x-akselin leikkauspiste sekä tangentin ja normaalin välinen kulma.**

Tangentin ja normaalin yhtälöt ovat suoran yhtälöitä, eli muotoa $y - y_0 = k(x - x_0)$, missä $x_0 = 0$, koska leikkauspiste on y-akselilla. Tästä saadaan

$$y_0 = f(x_0) = f(0) = 2\tan 0 - 3\cos 0 = -3\,.$$

Lisäksi

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + 3\sin x,$$

joten $k_{\text{tangentti}} = f'(0)$ eli

$$f'(0) = \frac{2}{\cos^2 0} + 3\sin 0 = 2\,.$$

Näin ollen

$$k_{\text{normaali}} = -\frac{1}{2}$$

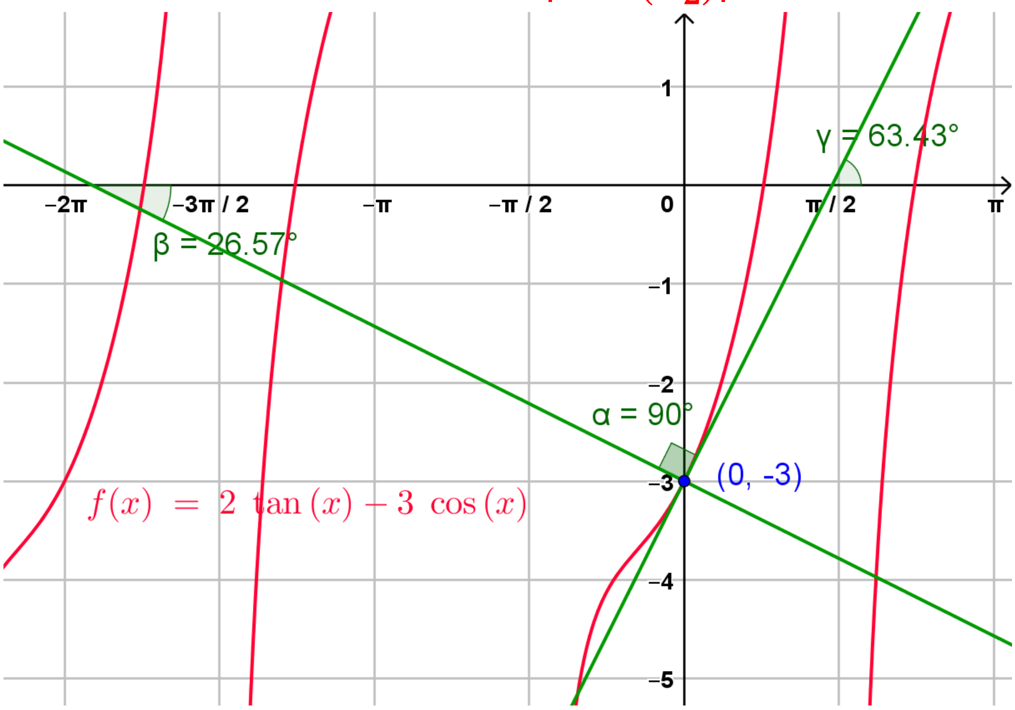
Normaalin yhtälö on siis

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Normaali leikkaa x-akselin kohdassa $(-6, 0)$.

Tangentin ja normaalin välinen kulma on aina 90°. Voihan sen laskeakin…

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_{\text{tangentti}} - k_{\text{normaali}}}{1 + k_{\text{tangentti}} \cdot k_{\text{normaali}}}\right| = \left|\frac{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\frac{2,5}{0}\right| \text{ ei määr.}$$



/6

/24