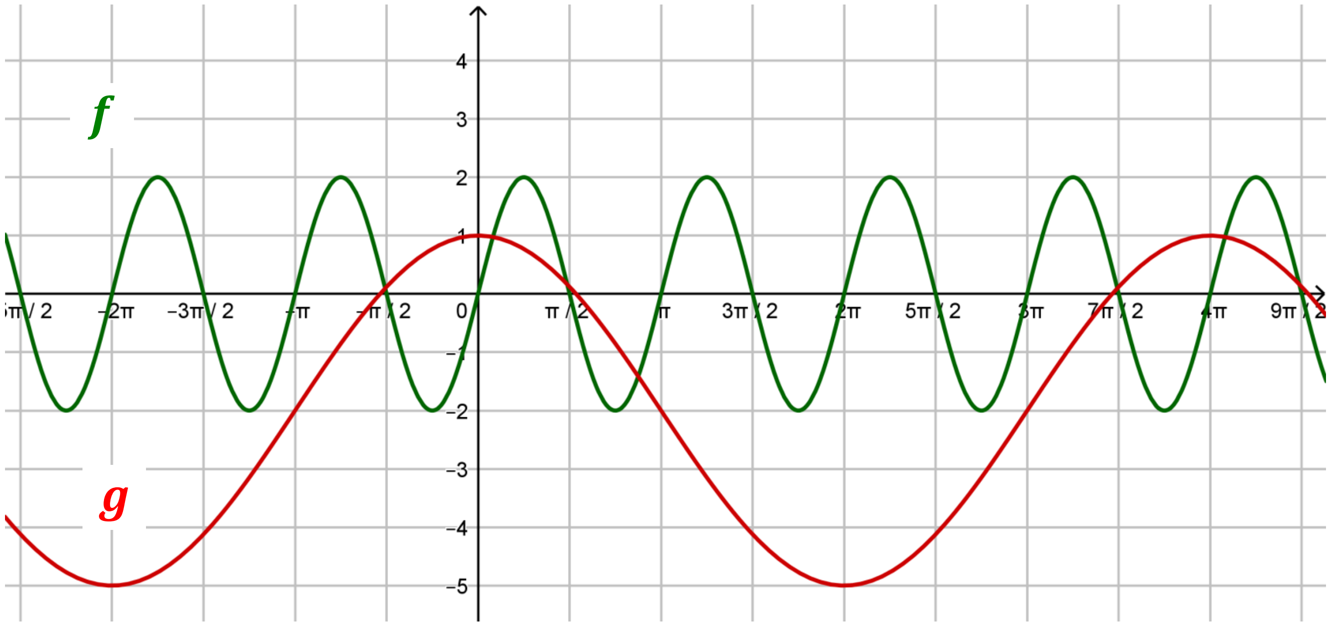
Matematiikan TESTI 2, Maa7 – Trigonometriset funktiot – RATKAISUT **Sievin lukio**
II jakso/2017
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Määritä kertoimet/parametrit A, b ja d funktioista f ja g. Funktiot ovat muotoa $A \cdot \mathrm{trig}(bx) + d$, missä trig tarkoittaa trigonometrista funktiota sin (funktio f) tai cos (funktio g). **(2p)**



Funktiolle f saadaan: $A = 2, b = 2$ ja $d = 0$.

Funktiolle g saadaan: $A = 3, b = \frac{1}{2}$ ja $d = -2$.

b) Määritä/Laske (ei tarvitse tehdä määritelmän kautta). **(2p)**

i) $D\left(\frac{-\cos x}{5}\right) = -\frac{1}{5} \cdot (-\sin x) = \frac{1}{5} \sin x$

ii) $D(3x \cdot \cos x) = 3 \cdot \cos x + 3x \cdot (-\sin x) = 3(\cos x - x \sin x)$

iii) $D\left(\frac{\cos x}{5 \sin x}\right) = \frac{-\sin x \cdot 5 \cdot \sin x - \cos x \cdot 5 \cos x}{(5 \sin x)^2} = \frac{-5 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \cos^2 x}{25 \cdot \sin^2 x} = \frac{-5 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{25 \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{5 \sin^2 x}$

iv) $D(\sin 2x) = D(2 \sin x \cos x) = 2 \cdot \cos x \cos x + 2 \sin x\,(-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2 \cos 2x$

c) Mitä arvoja funktio f: $f(x) = \frac{1}{13} \cdot \cos\left(\frac{2}{3}x + \sqrt{2}\right)$ saa? Mikä on funktion perusjakso? Perustele.(2p)

Funktio f saa trigonometrisena funktiona arvoja $\left[-\frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right]$, sillä peruskosini $\cos x$ saa arvoja aina $[-1,1]$ ja funktion f edessä oleva kerroin muokkaa amplitudia eli mahdollisia arvoja.

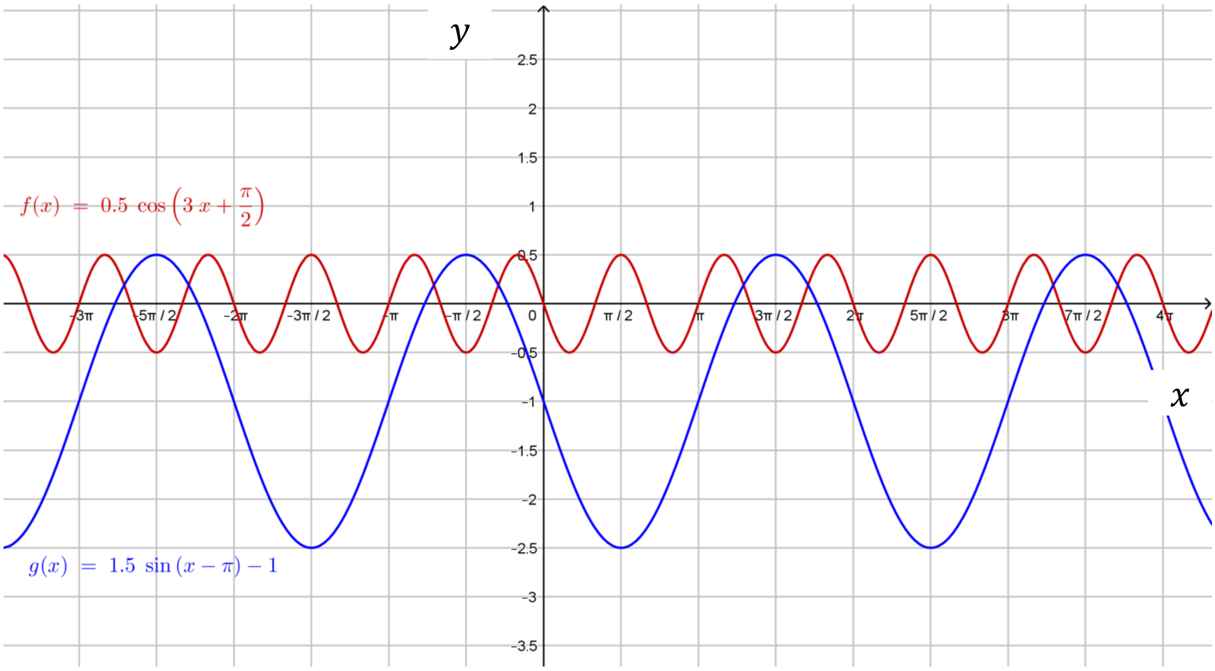
Funktion perusjaksona on $\frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$, sillä peruskosinin eli $\cos x$:n jakso on 2π ja muuttujan x edessä oleva kerroin "b" vaikuttaa taajuuteen eli jaksoon siten, että peruskosinin $\cos x$ jakso jaetaan ko. kertoimella.

Huom! Luku $\sqrt{2}$ ei vaikuta arvojoukkoon eikä funktion perusjaksoon. Se siirtää kuvaajaa vaakasuunnassa (positiivinen vasempaan ja negatiivinen luku oikeaan).

/6

2. a) Hahmottele alla olevaan koordinaatistoon funktioiden f ja g kuvaajat välille $[-3\pi, 4\pi]$, kun (2p)

i) f: $f(x) = 0,5 \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ ii) g: $g(x) = 1,5 \cdot \sin(x - \pi) - 1$



Amplitudista, perusjaksosta ja vaaka/pystysiirrosta 0,5 p

b) Määritä raja-arvo **(2p)**

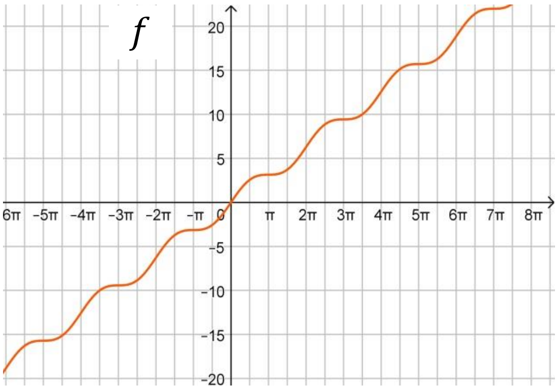
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{\cos x}.$$

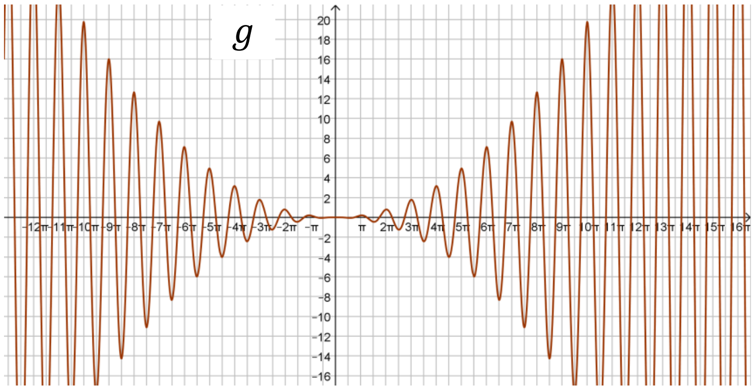
Miksi ei voida tehdä suoraa sijoitusta?

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 1}{\cos x}$$

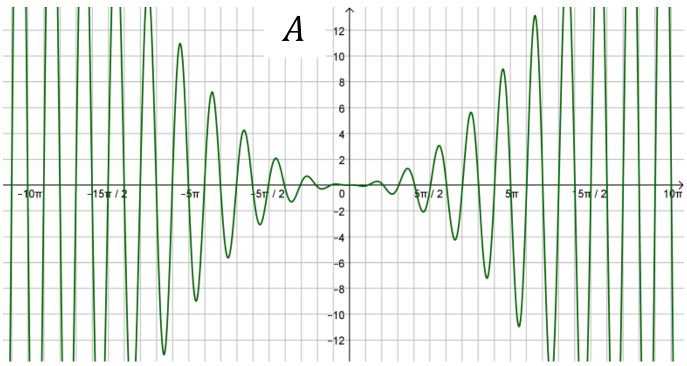
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2\cos x = 2 \cdot 0 = 0$$

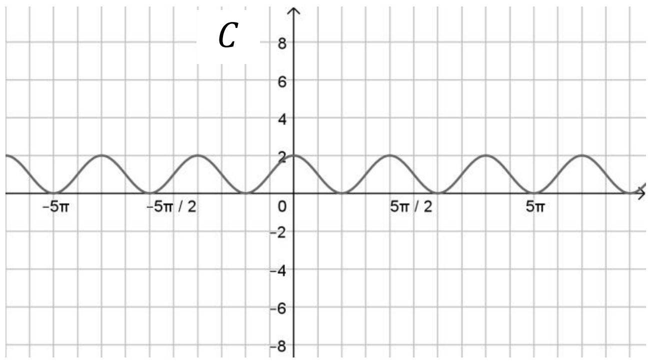
c) Ylemmissä kuvissa on kahden funktion f ja g kuvaajat. Alemmissa kuvissa on neljän funktion A, B, C ja D kuvaajat, joista yksi on f:n derivaatan kuvaaja ja yksi on g:n derivaatan kuvaaja. Yhdistä funktio derivaattaansa, esim. f – B. **(2p)**

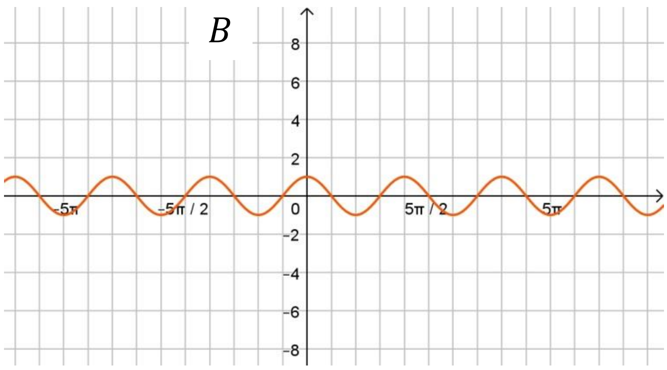


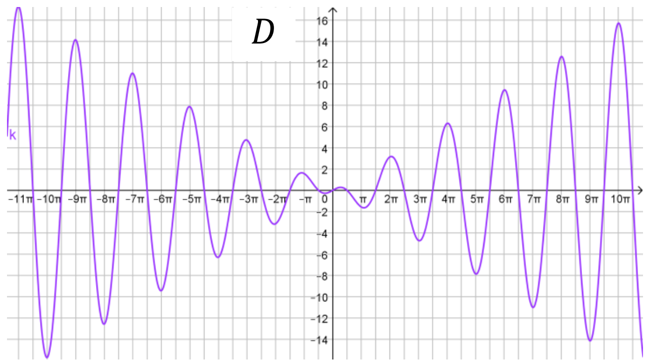


Funktiot f ja g.









VASTAUS: ___*f* – *C*___ **ja** ___*g* – *A*___

Perusteluja: Funktio f on aidosti kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla, joten C. Funktio g:n huippujen ja laaksojen reunaviiva on paraabelin kaltainen ja sama ilmiö löytyy A:sta, mutta D:ssä reunaviiva on suoran kaltainen. Kuvaajat A ja C eivät voi tulla kyseeseen.

/6

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. a) Määritä käyrän $y = x^2 \sin x$ kohtaan $x = \frac{\pi}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt. (3p)

Tangentin ja normaalin eli suoran yhtälö on muotoa

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{eli} \quad \begin{cases} y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \\ y - y(x_0) = \dfrac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0) \end{cases}.$$

Näin ollen, kun $x_0 = \frac{\pi}{2}$, niin saadaan

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4}$$

ja derivointi antaa: $y'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$. Joten tangentin kulmakerroin on

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \cdot 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0 = \pi$$

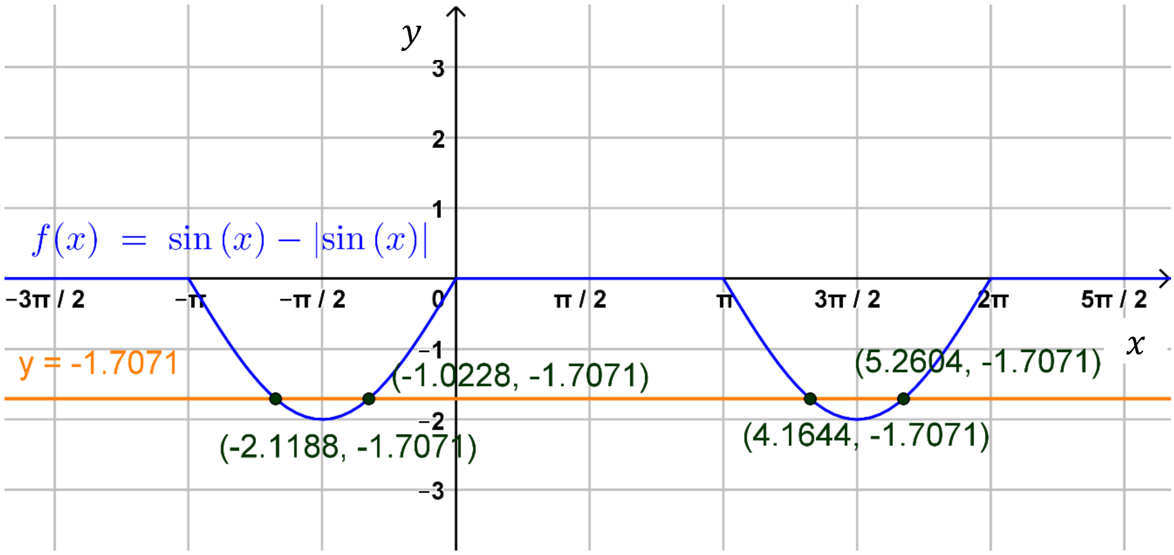
sekä normaalin kulmakerroin $-1/\pi$. Yhtälöt ovat siten:

$$y - \frac{\pi^2}{4} = \pi \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \pi x - \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(tangentti)}$$

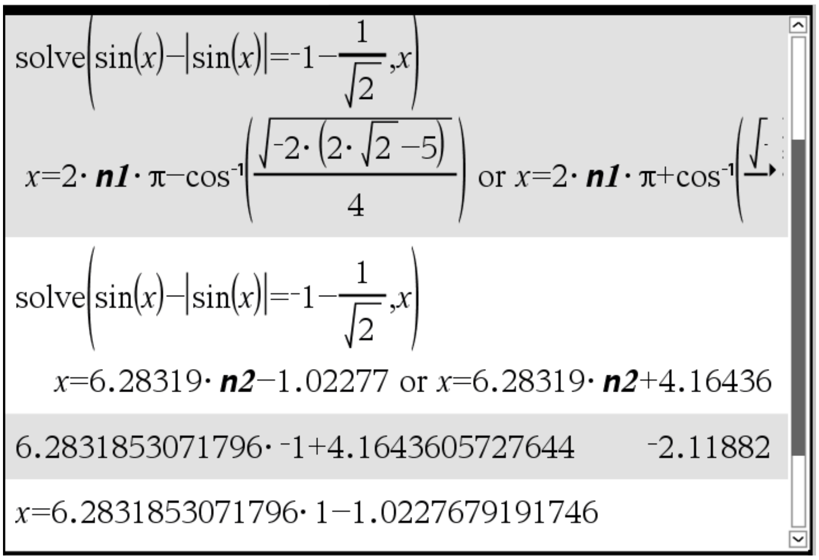
$$y - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{1}{\pi} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x}{\pi} + \frac{2 + \pi^2}{4} \qquad \text{(normaali)}$$

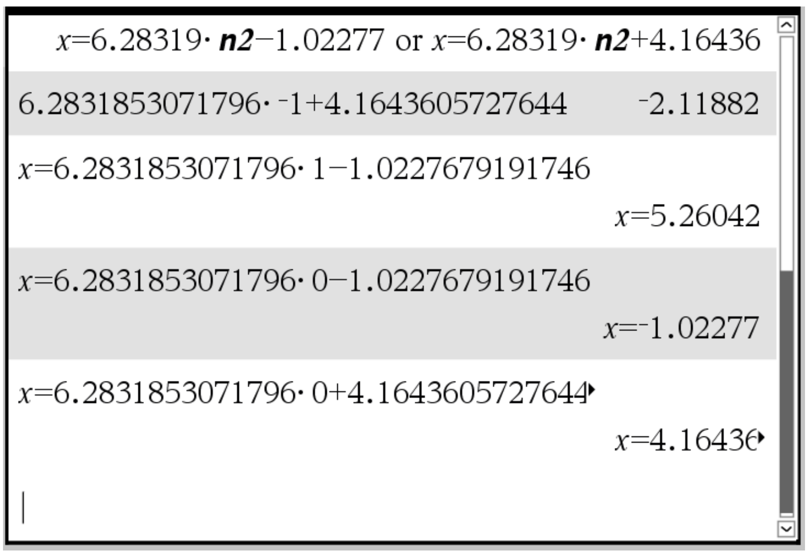
b) Hahmota käyrän $y = \sin x - |\sin x|$ ja suoran $y = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ kuvaajat. Ratkaise laskinta käyttäen ne käyrien leikkauspisteet, jotka kuuluvat välille $\left[-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Anna vastaukset 2 desimaalin tarkkuudella. (3p)

Kuvaajat piirrettynä samaan koordinaatistoon ja leikkauspisteet:



Muodostuu yhtälö $y = y$ eli $\sin x - |\sin x| = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, josta laskin antaa katso alla.





/6

4. Määritä funktion f: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$ suurin ja pienin arvo perustellen.

Funktio f on sinin ja kosinin summafunktiona jva ja dva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen suurin ja pienin arvo löytyvät derivaatan 0-kohdista, koska jaksollisuusominaisuus huomioiden funktio f ei saa mielivaltaisen suuria eikä mielivaltaisen pieniä arvoja kun muuttuja x lähestyy $\pm\infty$.

Derivointi antaa, kun huomataan, että $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$:

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos x + \frac{1}{2}(\cos x \cos x - \sin x \sin x)$$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}\left(\underbrace{(-\sin x)\cos x + \cos x\,(-\sin x)}_{=-2\cos x \sin x = -\sin 2x} - \underbrace{(\cos x \sin x + \sin x \cos x)}_{=2\sin x \cos x = \sin 2x}\right)$$

$$= \cos x + \frac{1}{2}(-\sin 2x - \sin 2x) = \cos x - \sin 2x = \cos x - 2\cos x \sin x$$

Ja, millä x derivaatan arvo $f'(x) = 0$? Saadaan yhtälö $\cos x - 2\cos x \sin x = \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$, jolle ratkaisut ovat:

$$\cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Näillä x:n arvoilla funktion arvot ovat:

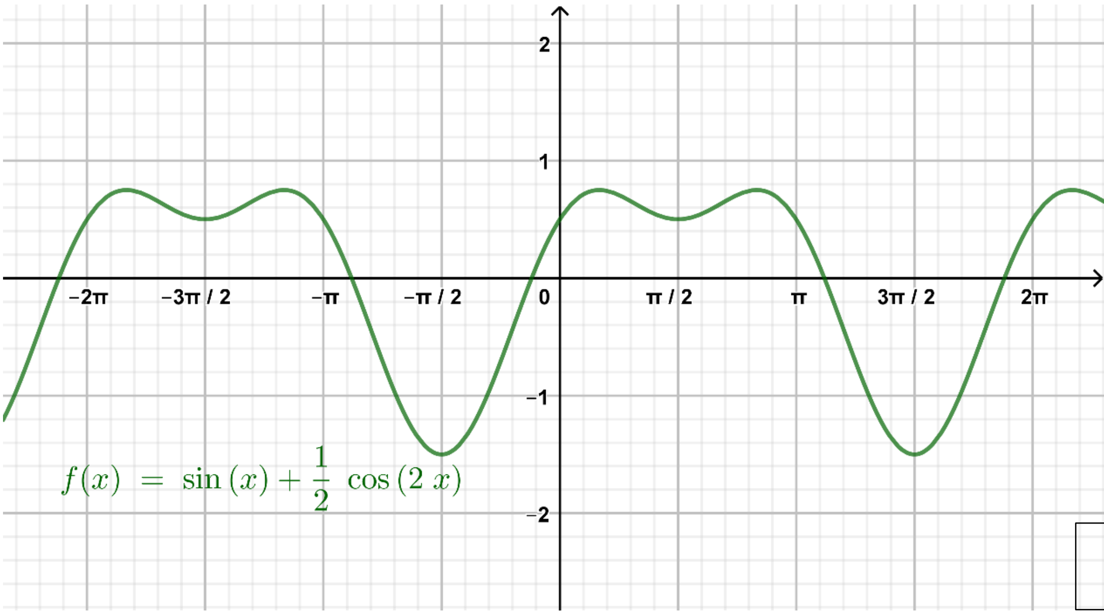
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = -1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Funktion f suurin arvo on siis $\frac{3}{4}$ ja pienin arvo $-\frac{3}{2}$. Kuvaaja alla.



/6

/24