

VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!

MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
 TARKISTA TEHTÄVÄT KOKEEN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Muunna asteiksi.

(2p)

$$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$$

$$-\frac{91\pi}{13} = -7 \cdot 180^\circ = 1260^\circ$$

b) Muunna radiaaneiksi.

(2p)

$$-150^\circ = -\frac{5\pi}{6}$$

$$840^\circ = \frac{14\pi}{3}$$

c) Missä koordinaatiston neljänneksessä sijaitsee 1-ympyrään piirretyn kulman $\frac{27\pi}{4}$ loppukylki?(1p)

Koska $\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 3 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, niin toisessa neljänneksessä.

d) Mikä on annetun sektorin keskuskulman suuruus asteina, kun sektoria vastaavan kaaren pituus on 6π ja säde 18?

(1p)

Koska $x = \frac{b}{r}$, niin $x = \frac{6\pi}{18} = \frac{\pi}{3}$ ja tämä on asteina 60° .

16

2. a) Piirrä kulmat $-\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{3}$ yksikköympyrään ja määritä lausekkeen arvo kuvion avulla. Siis, vain lukuarvot!

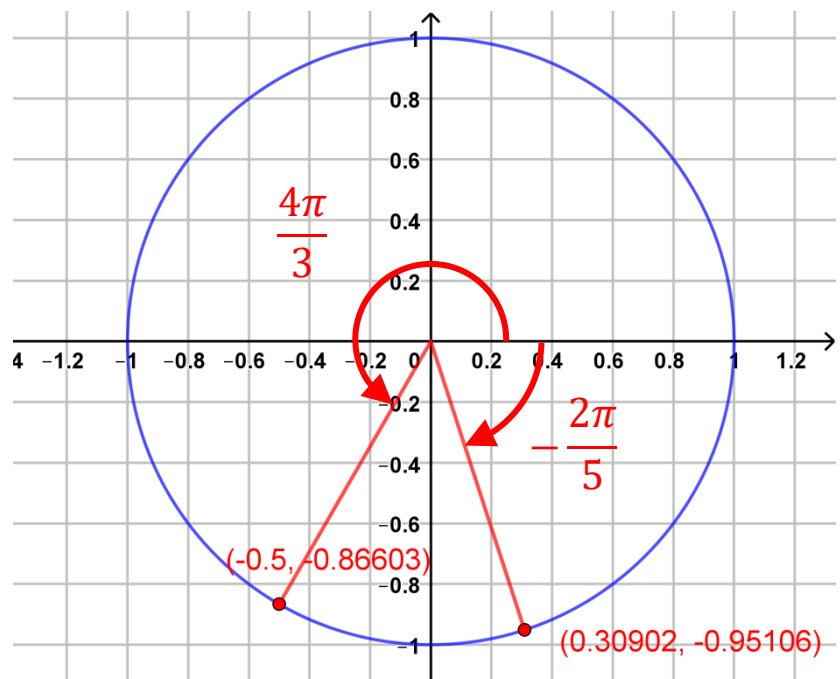
(2p)

i) $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -0,95$

ii) $\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -0,95$

iii) $\cos\frac{4\pi}{3} = -0,5$

iv) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -0,5$



b) Määritä seuraavat kuvan 2 avulla yhden desimaalin tarkkuudella.

(2p)

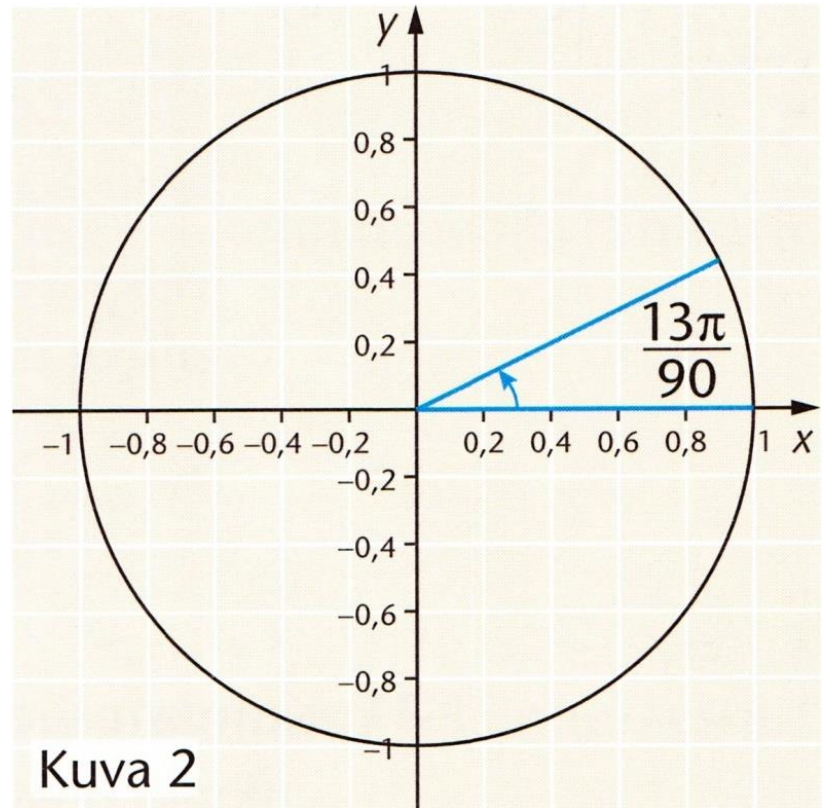
(Tässä oli siis virhe, saat 1 pisteen jos olet yrittänyt saada tulosta ii) ja iv)-kohtiin)

i) $\sin\left(\frac{13\pi}{90} + \pi\right) = -0,4$

ii) $\sin\left(-\frac{77\pi}{90}\right) = -0,4$

iii) $\cos\left(\pi - \frac{13\pi}{90}\right) = -0,9$

iv) $\cos\frac{77\pi}{90} = -0,9$



c) Tiedetään, että $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $180^\circ < x < 270^\circ$. Määritä $\cos x$.

(2p)

Ratkaistaan ensin mahdolliset kosinin arvot, hyödynnetään kaavaa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Koska $x \in]180^\circ, 270^\circ[$, niin kulmaa x vastaavan kehäpisteen P x -koordinaatin eli $\cos x$:n arvo on negatiivinen, joten hylätään positiivinen arvo. Näin ollen kosinin tarkka arvo on

$$\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

3. a) Laske lausekkeen $\sin^2 x + \cos 2x$ tarkka arvo, kun i) $x = \frac{\pi}{3}$ ja ii) $x = -\frac{3\pi}{4}$. (2p)

i) Saadaan

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ii) Saadaan

$$\sin^2\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

b) Osoita, että $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \sin^2 x - 1$. Vihje: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. (2p)

Saadaan

$$\begin{aligned} \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x - 1 \end{aligned}$$

c) Sievennä lauseke. (2p)

$$\frac{\sin(\pi - x)(1 - \sin(-x)) + \cos^2(-x) - 1}{\cos x (\cos(-x) - \cos(\pi - x)) + 2 \sin^2 x}$$

Saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{\overbrace{\sin(\pi - x)}^{= \sin(x)} (1 - \sin(-x)) + \cos^2(-x) - 1}{\cos x (\cos(-x) - \cos(\pi - x)) + 2 \sin^2 x} = \frac{\sin(x)(1 + \sin(x)) + \cos^2(x) - 1}{\cos x (\cos(x) + \cos(x)) + 2 \sin^2 x} \\ & = \frac{\sin(x) + \overbrace{\sin^2 x + \cos^2(x)}^{=1} - 1}{2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} = \frac{\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

/6

4. a) Ratkaise yhtälöt. Anna vastaukset 2-desimaalisena likiarvona. (2p)

i) $\sin \alpha = 0,85$ (Kirjoita ensin selkokielellä mitä pitää tehdä. Anna vastaus asteina.)

ii) $\cos x = \frac{1}{5}$ (Kirjoita ensin selkokielellä mitä pitää tehdä. Anna vastaus radiaaneina.)

i) Millä kulman α arvolla yksikköympyrän kehäpisteen y -koordinaatin arvo 0,85. Ratkaistaan yhtälö.

$$\sin \alpha = 0,85$$

$$\alpha = 58,211 \dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\approx 58,21^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 58,211 \dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$= 121,788 \dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\approx 121,79^\circ + n \cdot 360^\circ$$

ii) Millä kulman x arvolla yksikköympyrän kehäpisteen x -koordinaatin arvo $\frac{1}{5}$. Ratkaistaan yhtälö.

$$\cos x = \frac{1}{5}$$

$$x = 1,369 \dots + n \cdot 2\pi$$

$$\approx 1,37 + n \cdot 2\pi$$

$$x = -1,369 \dots + n \cdot 2\pi$$

$$\approx -1,37 + n \cdot 2\pi$$

b) Ratkaise yhtälöt. Anna vastaukset tarkkoina arvoina.

(2p)

i) $\cos(30^\circ + \beta) + \cos 2\beta = 0$ (Kirjoita ensin selkokielellä mitä pitää tehdä. Anna vastaus asteina.)

ii) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ (Kirjoita ensin selkokielellä mitä pitää tehdä. Anna vastaus radiaaneina.)

i) Millä kulman β arvolla $\cos(30^\circ + \beta) = -\cos 2\beta$. Kosinin tapauksessa muistetaan sääntö: $\cos x = \cos y \Rightarrow x = \pm y + n \cdot 360^\circ$ (Ei määrittelyehtoja!) Näin ollen ratkaistaan yhtälö:

$$\cos \underbrace{(30^\circ + \beta)}_{=x} = -\cos 2\beta = \cos \underbrace{(180^\circ - 2\beta)}_{=y}$$

$$30^\circ + \beta = 180^\circ - 2\beta + n \cdot 360^\circ$$

$$30^\circ + \beta = -(180^\circ - 2\beta) + n \cdot 360^\circ$$

$$3\beta = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$-\beta = -210^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\beta = 50^\circ + n \cdot 120^\circ$$

$$\beta = 210^\circ + n \cdot 360^\circ$$

ii) Millä kulman x arvolla $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$. Sinin tapauksessa muistetaan sääntö: $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta + n \cdot 2\pi$ tai $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi$ (Ei määrittelyehtoja!) Näin ollen ratkaistaan yhtälö:

$$\sin \underbrace{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{=\alpha} = \sin \underbrace{\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)}_{=\beta}$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 3x - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = \pi - \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + n \cdot 2\pi$$

$$-2x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{5\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

c) Ratkaise yhtälö $\sin x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ muuntamalla yhtälö i) siniyhtälöksi ii) kosiniyhtälöksi.

Merkitse ratkaisukulmat yksikköympyrään (eli piirrä pieni pallero ko. kulmaa vastaavan kehäpisteen paikalle) ja kirjoita kulman suuruus kehäpisteen viereen. (2p)

i) Koska $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, niin saadaan siniyhtälö.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sin(x)}_{=\alpha} &= \underbrace{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}_{=\beta} \Leftrightarrow \underbrace{\sin(x)}_{=\alpha} = \underbrace{\sin(2x + \pi)}_{=\beta} \\ \Rightarrow x &= 2x + \pi + n \cdot 2\pi & \Rightarrow x &= \pi - (2x + \pi) + n \cdot 2\pi \\ -x &= \pi + n \cdot 2\pi & 3x &= n \cdot 2\pi \\ x &= -\pi + n \cdot 2\pi & x &= n \cdot \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

ii) Koska $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, niin saadaan kosiniyhtälö.

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}_{=\alpha} &= \underbrace{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}_{=\beta} \\ \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} &= 2x + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi & \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} &= -\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + n \cdot 2\pi \\ -x &= \pi + n \cdot 2\pi & 3x &= n \cdot 2\pi \\ x &= -\pi + n \cdot 2\pi & x &= n \cdot \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

