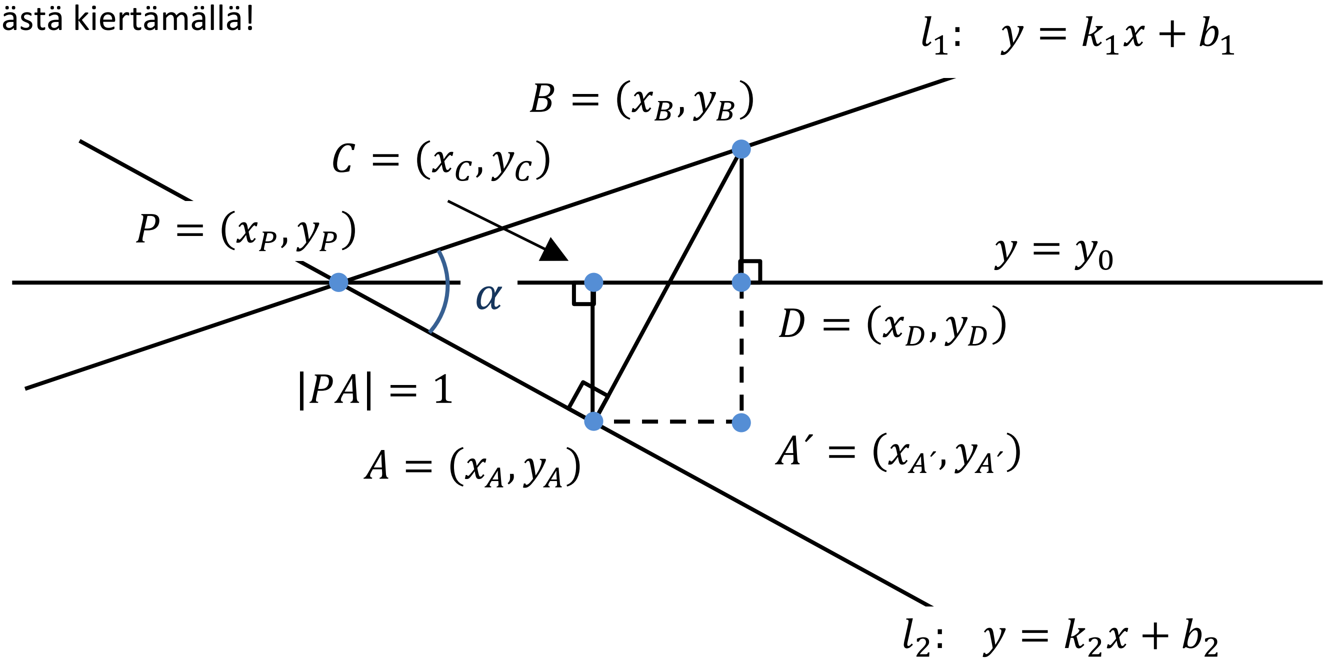
Todistus: Osoitetaan, että

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Piirretään tilanteesta kuva, alla. (Nyt tilanne, jossa $k_1 > 0$ ja $k_2 < 0$). Tähän tilanteeseen voidaan aina päästä kiertämällä!



Merkitään suorien välistä leikkauspistettä P:llä, kuva. Valitaan pisteet A ja B suorilta l_1 ja l_2 siten, että kulma $\sphericalangle PAB$ on suora ja pituus $|PA| = 1$. Näin voidaan aina tehdä, olivat suorat sijoittuneet miten tahansa toisiinsa nähden.

Pisteet C ja D valitaan vaakatason suoralta, joka kulkee pisteen P kautta, siten, että kulmat $\sphericalangle PCA$ ja $\sphericalangle PDB$ ovat suoria, kuva.

Todistuksessa hyödynnetään tietoa, $k_1 k_2 = -1$, Pythagoraan lausetta ja määritelmää

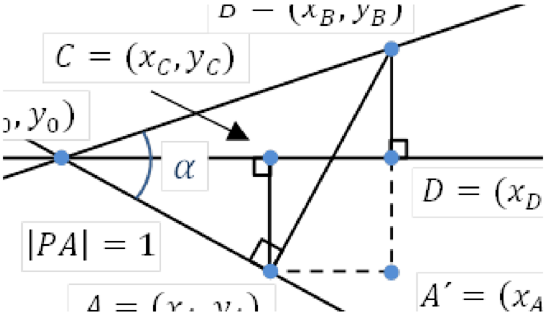
$$\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}.$$

ITSE TODISTUS: Koska $PA = 1$, niin tangentin määritelmää, $\tan\alpha = \frac{AB}{PA}$, käyttäen riittää osoittaa, että $AB = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. Tarvitaan muutamia tuloksia (ideana, ilmoitetaan etäisyyksiä kulmakertoimien avulla). Pythagoras antaa

$$1^2 = |x_C - x_P|^2 + \underbrace{|y_C - y_A|}_{= k_2 |x_C - x_P|}{}^2 = |x_C - x_P|^2 + {k_2}^2 |x_C - x_P|^2 = \left(1 + {k_2}^2\right)|x_C - x_P|^2$$

$$\Longrightarrow \qquad |x_C - x_P|^2 = \frac{1}{1 + {k_2}^2} \quad \text{eli} \quad (x_A - x_P)^2 = \frac{1}{1 + {k_2}^2}$$

Pythagoras antaa edelleen koska $A'B$ voidaan ilmoittaa muodossa $A'D + DB$. KUVA →



$$
\begin{aligned}
AB^2 &= AA'^2 + A'B^2 \\
&= |x_D - x_C|^2 + |y_B - y_{A'}|^2 \\
&= (x_{A'} - x_A)^2 + \big((y_B - y_D) + (y_D - y_{A'})\big)^2
\end{aligned}
$$

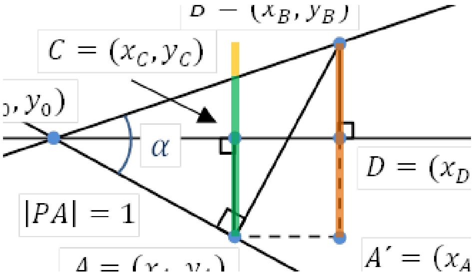
Etsitään, mitä ovat $(x_{A'} - x_A)^2$ ja $\big((y_B - y_D) + (y_D - y_{A'})\big)^2$ kulmakertoimien avulla.

$\underline{(x_{A'} - x_A)^2}$:

Koska suora l_3, joka kulkee pisteiden A ja B kautta on kohtisuorassa suoraa l_2 vastaan, niin

$$|A'B| = k_3(x_{A'} - x_A) \overset{\text{kohtisuoruus}}{\widehat{=}} -\frac{1}{k_2}(x_{A'} - x_A)$$

ja toisaalta $|A'B| = k_1(x_{A'} - x_A) + (k_1 - k_2)(x_A - x_P)$. Nämä yhdistäen, saadaan



$$-\frac{1}{k_2}(x_{A'} - x_A) = k_1(x_{A'} - x_A) + (k_1 - k_2)(x_A - x_P)$$

$$\Longrightarrow \quad -1 = k_1k_2 + k_2(k_1 - k_2)\frac{(x_A - x_P)}{(x_{A'} - x_A)}$$

$$\Longrightarrow \quad (x_{A'} - x_A)^2 = \frac{\left(k_2{}^2 - k_1k_2\right)^2 (x_A - x_P)^2}{(1 + k_1k_2)^2} = \frac{\left(k_2{}^2 - k_1k_2\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1k_2)^2}$$

$\underline{\big((y_B - y_D) + (y_D - y_{A'})\big)^2}$:

Koska k_1 ja k_2 ovat tiedossa, niin

$$(y_B - y_D) = k_1(x_D - x_P) = k_1(x_D - x_C) + k_1(x_C - x_P) = k_1(x_{A'} - x_A) + k_1(x_A - x_P)$$

$$(y_D - y_{A'}) = (y_C - y_A) = -k_2(x_A - x_P), \qquad \text{koska } k_2 < 0$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= (x_{A'} - x_A)^2 + \big((y_B - y_D) + (y_D - y_{A'})\big)^2 \\
&= \frac{\left(k_2{}^2 - k_1k_2\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1k_2)^2} + [k_1(x_{A'} - x_A) + (k_1 - k_2)(x_A - x_P)]^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2} + \left[k_1{}^2 (x_{A'} - x_A)^2 + 2 \cdot k_1 (x_{A'} - x_A) \cdot (k_1 - k_2)(x_A - x_P) + (k_1 - k_2)^2 (x_A - x_P)^2\right]$$

Termit $(x_A - x_P)^2 = \frac{1}{1+k_2{}^2}$ ja $(x_A - x_P) = \frac{1+k_1 k_2}{k_2{}^2 - k_1 k_2}(x_{A'} - x_A)$ ovat jo tiedossa, joten

$$= \frac{\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2} + \left[k_1{}^2 (x_{A'} - x_A)^2 + 2\left(k_1{}^2 - k_1 k_2\right) \frac{1 + k_1 k_2}{k_2{}^2 - k_1 k_2} (x_{A'} - x_A)^2 + (k_1 - k_2)^2 \frac{1}{1 + k_2{}^2}\right]$$

Lopuksi termi $(x_{A'} - x_A)^2 = \frac{\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 \cdot \frac{1}{1+k_2{}^2}}{(1+k_1 k_2)^2}$ on myös tiedossa, joten

$$= \frac{\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2} + \frac{\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 \cdot \frac{k_1{}^2}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2} + \frac{2\left(k_1{}^2 - k_1 k_2\right)\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right) \cdot \frac{1 + k_1 k_2}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2} + \frac{(k_1 - k_2)^2 \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2} \cdot (1 + k_1 k_2)^2}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

Havaitaan, että kaikilla termeillä on sama nimittäjä → yhdistetään ja sievennetään (värikoodit)

$$= \frac{\left[\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 + k_1{}^2\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 + 2\left(k_1{}^2 - k_1 k_2\right)\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)(1 + k_1 k_2) + (k_1 - k_2)^2 (1 + k_1 k_2)^2\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(1 + k_1{}^2\right)\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 - 2 k_1 k_2 (k_1 - k_2)^2 (1 + k_1 k_2) + (k_1 - k_2)^2 (1 + k_1 k_2)(1 + k_1 k_2)\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(1 + k_1{}^2\right)\left(k_2{}^2 - k_1 k_2\right)^2 + \left(-2 k_1 k_2 + (1 + k_1 k_2)\right)(k_1 - k_2)^2 (1 + k_1 k_2)\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(1 + k_1{}^2\right) k_2{}^2 (k_2 - k_1)^2 + (1 - k_1 k_2)(k_1 - k_2)^2 (1 + k_1 k_2)\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(k_2{}^2 + k_1{}^2 k_2{}^2\right)(k_1 - k_2)^2 + \left(1 - k_1{}^2 k_2{}^2\right)(k_1 - k_2)^2\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(k_2{}^2 + k_1{}^2 k_2{}^2 + 1 - k_1{}^2 k_2{}^2\right)(k_1 - k_2)^2\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(k_2{}^2 + 1\right)(k_1 - k_2)^2\right] \cdot \frac{1}{1 + k_2{}^2}}{(1 + k_1 k_2)^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(1 + k_1 k_2)^2} = \frac{|k_1 - k_2|^2}{|1 + k_1 k_2|^2} = \frac{|k_2 - k_1|^2}{|1 + k_1 k_2|^2} = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|^2$$

Ja näin voidaan todeta todistus valmiiksi, sillä

$$AB^2 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|^2 \overset{\text{etäisyydet positiivisia}}{\Rightarrow} AB = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{AB}{PA} = \frac{\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|}{1} = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$